No	titre	3	4	5	6	7	8	9	Ar.	Alg.	Gé.	Lo.	Co.	Orig.
1	Les confitures	3											X	GE
2	Additions codées	3	4						XX					BB
3	Les boîtes de crayons	3	4						XX					PR
4	Pas de jaloux	3	4	5							X			BB
5	Billes	3	4	5					X				X	PR
6	Les deux rectangles		4	5	6						XX			C.I.
7	Cartes carrées		4	5	6				X			X		RMT(BB)
8	Une croissance extraordinaire			5	6	7			X					AO
9	Un oeil sur les pierres			5	6	7			X		X			GE
10	La plus petite différence			5	6	7			X			X		BB
11	Quadritriangles				6	7	8	9			XX			PR
12	Les danseuses				6	7	8	9				XX		PR
13	Les gourmands					7	8	9			XX			TI+CI
14	À table ensemble					7	8	9				X	X	SI+PR
15	La tour de Transalpie						8	9	X		X			C.I.
16	Le serpent myope						8	9	X		X			CI
17	Logos						8	9	X		X			C.I

1. LES CONFITURES (Cat. 3)

Une paysanne du village de Forêt Verte prépare cinq confitures différentes : aux châtaignes, aux abricots, aux figues, aux melons, aux tomates vertes. Elle les met dans des pots et les vend aux touristes.

Un client achète deux pots de confitures différentes.

Quelles confitures peut-il avoir achetées ?

Indiquez toutes les façons possibles d'acheter deux confitures différentes.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Combinatoire : aspects intuitifs

Analyse de la tâche

- Mettre en œuvre une procédure d'inventaire systématique, par un dessin ou une liste.
- Déterminer les possibilités pour constater qu'il y en a 10 (en évitant de compter les symétriques) :
  CA - CF - CM - CT - AF - AM - AT - FM - FT - MT

Attribution des points

4 Réponse exacte : les 10 combinaisons sans répétitions, sous forme d'inventaire ou de dessin

3 Liste de 9 possibilités, sans répétitions

2 Liste de tous les cas possibles, avec les symétriques (20)
ou de 6 à 8 combinaisons sans répétitions
ou 10 ou 9 combinaisons avec quelques répétitions

1 Début de recherche ou liste de 5 combinaisons

0 Incompréhension du problème

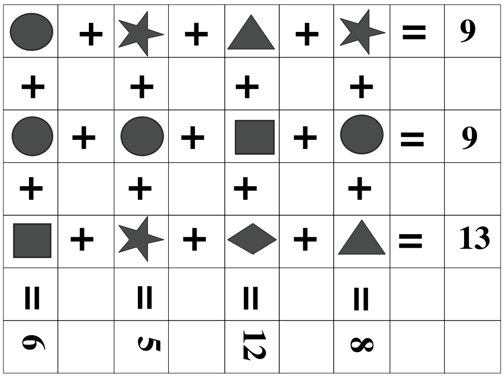
Niveau : 3

Origine : Genova

2. ADDITIONS CODÉES (Cat. 3, 4)

Dans ce tableau, il y a des additions dans les lignes et dans les colonnes.

Chacune des figures (le rond, le carré, l'étoile, le triangle et le losange) remplace toujours un même nombre.



Trouvez par quels nombres il faut remplacer ces dessins pour que toutes les additions soient justes.

Montrez comment vous avez fait pour trouver ces nombres.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition
- Logique : organiser et gérer un raisonnement

Analyse de la tâche

- Comprendre que deux figures différentes représentent deux nombres différents.
- Procéder par essais en attribuant des valeurs aux différentes figures, calculer les sommes et vérifier l'égalité avec les nombres écrits en bout de lignes ou en bas de colonnes.

Ou :Remarquer que pour passer de la première colonne à la deuxième ligne, on ajoute le rond, d'où sa valeur : 9 - 6 = 3. De même on trouve le triangle comme différence entre la première ligne et la deuxième colonne, donc 4. Et on trouve l'étoile en comparant la troisième ligne et la troisième colonne. Ensuite le carré s'obtient en soustrayant trois ronds à la deuxième ligne. Pour finir, le losange sera calculé dans la troisième colonne par exemple.

Ou: Procéder par hypothèses et déductions. Par exemple, attribuer la valeur 1 au rond et déduire en utilisant la première colonne que le carré vaut alors 4. Remplacer le rond par 1 et le carré par 4 à la seconde ligne et constater que la somme est différente de 9. Recommencer avec une autre valeur pour le rond.

- Arriver enfin à la solution : rond : 3 , carré : 0, étoile : 1, triangle **:** 4, losange : 8.

Attribution des points

4 Réponse correcte « rond : 3 , carré : 0, étoile : 1, triangle **:** 4, losange : 8 » avec description de la procédure

3 Réponse correcte (les 5 valeurs exactes) sans description ou quatre valeurs exactes avec description

2 Quatre valeurs exactes sans description ou trois valeurs exactes avec description

1 Trois valeurs exactes sans description ou deux valeurs exactes avec description

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3 - 4

Origine : Bourg-en-Bresse

3. LES BOÎTES DE CRAYONS (Cat. 3, 4)

Cinq boîtes de crayons sont exposées dans la vitrine d'une papeterie.
Leurs prix sont :

5 €	8 €	10 €	12 €	13 €

Après quelques jours, le papetier en a vendu quatre : une à Alex, une à Brice, une à Carla et une à David.

- Alex a payé uniquement avec des pièces de 2 euros et on ne lui a rien rendu.
- Brice a dépensé 3 euros de plus que Carla.
- David a payé avec deux billets de 5 euros et le marchand lui a rendu de la monnaie.

Quel est le prix de la boîte achetée par Alex ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction
- Logique : déduction

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème et leurs conséquences :
  Alex n'a pas pu acheter la boîte à 5 € ni celle à 13 € ;
  Brice et Carla ont payé respectivement 8 € et 5 € ou bien 13 € et 10 € ;
  David n'a payé ni 5 € (il a donné 2 billets de 5 €), ni 10 € (on lui a rendu de l'argent), ni 12 €, ni 13 € (2 billets de 5 € n'auraient pas suffi). Il a donc payé 8 €.
  Par conséquent Brice et Carla ont payé respectivement 13 € et 10 € et la boîte d'Alex coûte 12 €.

Ou : comprendre immédiatement que la dernière condition permet de déterminer immédiatement le prix de la boîte de David, puis celles de Brice et Carla et enfin celle d'Alex, comme unique nombre pair restant à disposition.

Attribution des points

4 Réponse correcte (12 €) avec une explication du raisonnement utilisé

3 Réponse correcte avec une explication incomplète ou peu claire (par exemple, ne fournissant pas tous les éléments du raisonnement)

2 Réponse correcte sans aucune justification
ou une réponse avec une seule erreur, mais avec explications

1 Début de raisonnement correct non abouti

0 Incompréhension du problème

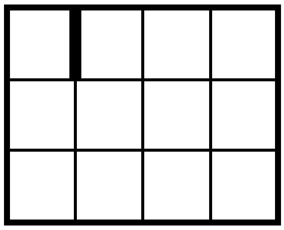
Niveau : 3 - 4

Origine : Parma

4. PAS DE JALOUX (Cat. 3, 4, 5)

Amandine veut partager ce rectangle en deux parties ayant chacune le même nombre de carreaux, mais pas forcément la même forme. Tous les carreaux doivent rester entiers et le découpage doit donc suivre les lignes du quadrillage.

Amandine a commencé le partage, en traçant un premier trait (plus large sur la figure) :



Continuez le partage commencé par Amandine.

Trouvez toutes les façons de continuer le partage d'Amandine pour obtenir deux parties ayant le même nombre de carreaux.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie

Analyse de la tâche

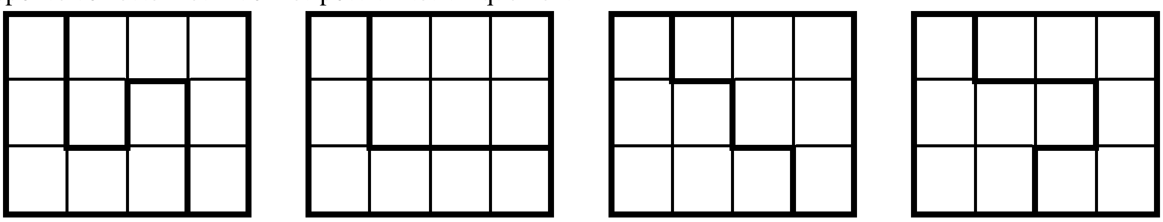
- Procéder par essais en partageant le rectangle en deux parties et en comptant le nombre de carreaux contenus dans chacune des parties.

Ou : Poursuivre le tracé commencé par Amandine en contrôlant dans le même temps le nombre de carreaux de part et d'autre de la ligne tracée.

Ou : Dénombrer le nombre de carreaux contenus dans le rectangle, le diviser par 2 et tracer une ligne de façon à faire apparaître une partie contenant exactement 6 carreaux

Attribution des points

4 Réponse correcte : les 4 bonnes possibilités uniquement :



3 Les 4 bonnes possibilités et une solution erronée (parties non équivalentes, partage ne suivant pas les lignes, répétition d'un partage)
ou 3 possibilités correctes, sans réponse erronée

2 Trois possibilités correctes et une solution erronée
ou 2 possibilités correctes, sans solution erronée
ou quatre possibilités correctes accompagnées de plus d'une réponse erronée

1 Deux possibilités correctes avec présence d'une ou plusieurs solutions erronées
ou une possibilité correcte avec présence ou non de solutions erronées
ou trois possibilités correctes accompagnées de plus d'une réponse erronée

0 Absence de réponse correcte ou incompréhension du problème

Niveau : 3 - 4 - 5

Origine : Bourg-en-Bresse

5. BILLES (Cat. 3, 4, 5)

Anne, Béatrice et Charles ont joué aux billes avec d'autres camarades.

À eux trois, ils ont gagné 20 billes en tout.

Charles a gagné deux fois plus de billes que Béatrice.

Anne n'a pas gagné plus de billes que Béatrice.

Combien de billes peut avoir gagné chacun des trois enfants ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et décomposition additive

Analyse de la tâche

- Commencer la recherche par le nombre de billes de B. Par exemple : si B a 1 bille, C en a 2, mais A ne peut en avoir gagnée qu'une et la somme n'est pas 20 ; si B a 2 billes, C en a 4 et A 1 ou 2, ce qui ne donne toujours pas une somme de 20, et ainsi de suite jusqu'au cas où B en a 5, C 10 et A 5 et au cas où B en a 6, C 12 et A 2. On vérifie ensuite que si on augmente encore le nombre de billes de B, on arrive à une somme supérieure à 20.

Ou : comprendre que le nombre de billes de Charles est pair. Commencer par faire un choix de nombres pour celui-ci. Se rendre compte que 20, 18, 16 et 14 sont trop grands, examiner 12 et trouver 6 pour B et 2 pour A, puis examiner 10, qui conduit à 5 pour B et 5 pour A et finalement constater que pour les nombres pairs suivants, 8, 6, … le nombre de billes de A serait supérieur à celui de B.

Ou : décomposer 20 en une somme de trois nombres et vérifier que les conditions sont respectées.

Ou : diviser 20 par 4, constater que 5 (A), 5 (B), 10 (C) est une solution convenable ; essayer ensuite avec 6 (B) e 12 (C) et par conséquent 2 (A) et déduire qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Attribution des points

4 Réponse correcte : les deux solutions (Anne : 5, Béatrice : 5, Charles : 10 et Anne : 2, Béatrice : 6, Charles : 12) avec explication de la démarche qui montre qu'il n'y a pas d'autre solution

3 Les deux solutions correctes avec explications peu claires, incomplètes ou avec seulement une vérification

2 Les deux solutions correctes sans explication ou une solution avec explications

1 Une solution correcte sans explication ou début de résolution organisée

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3 - 4 - 5

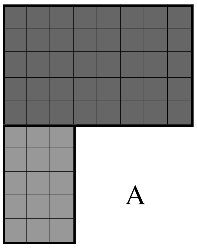
Origine : Parme

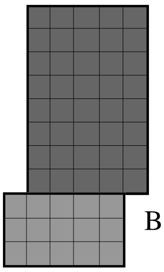
6. LES DEUX RECTANGLES (Cat. 4, 5, 6)

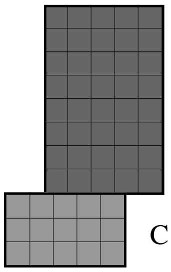
On découpe deux rectangles dans une feuille de papier quadrillé, en suivant les lignes du quadrillage. Les dimensions du premier rectangle sont 5 et 8, celles du second sont 5 et 3 (unité : le côté d'un carré du quadrillage).

On place ces deux rectangles l'un contre l'autre, sans les superposer, de façon à ce qu'ils se touchent par un ou plusieurs côtés entiers de carreaux. (Un carreau d'un rectangle ne peut en toucher qu'un seul de l'autre rectangle, par un côté entier.) On peut obtenir ainsi de nombreuses figures.

(Exemples : Les figures A et B sont correctes. La figure C est incorrecte car il y a des carreaux d'un rectangle qui touchent deux carreaux de l'autre rectangle.)


A


B


C

Les figures obtenues n'ont pas toutes le même périmètre. Par exemple, le périmètre de A mesure 36 unités, celui de B en mesure 34.

Quel est le plus petit périmètre que peut avoir une figure obtenue en assemblant ces deux rectangles en respectant les règles d'assemblage ?

Et quel est le plus grand périmètre qu'on peut obtenir ?

Expliquez comment vous avez trouvé et montrez vos solutions.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangles, polygones et périmètres
- Arithmétique : additions

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé, comprendre les règles de formation des figures à partir des deux rectangles et ce que représente leur périmètre en s'aidant pour cela des deux exemples fournis.
- Dessiner d'autres figures ou les construire par déplacements de rectangles mobiles découpés dans du papier quadrillé et calculer leur périmètre. Trouver ainsi, par essais successifs, que le plus petit périmètre est 32 et le plus grand 40.
- Comprendre que le périmètre des figures est plus petit que la somme des deux périmètres des rectangles (42 = 26 + 16) et qu'il dépend de la longueur de la partie commune, indépendamment de la forme de la figure, ce qui permet d'expliquer que, si cette partie mesure 1 (la plus petite possible), le périmètre sera 42 – 2 x 1 = 40 et si cette partie mesure 5 (la plus grande possible), le périmètre sera 42 – 2 x 5 = 32.

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (32 et 40) avec explications (reposant sur la variation du périmètre en fonction de la longueur de la partie commune) et avec les dessins d'une des figures ayant le plus petit périmètre et d'une des figures ayant le plus grand périmètre (par exemple, le rectangle de 11 x 5) ou par un inventaire de toutes les possibilités.

3 Les deux réponses correctes, avec le dessin d'une des deux figures seulement, ou la présence des figures correctes mais avec erreurs de calcul du périmètre (écart d'une ou deux unités par rapport à la valeur exacte)

2 Les deux réponses correctes, sans aucune explication ni figure
ou une seule réponse correcte avec les deux figures

1 Une des deux réponses correctes, avec une seule des deux figures
ou deux réponses proches, avec dessins correspondants

0 Incompréhension

Degrés : 4 - 5 - 6

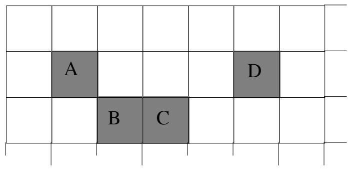
Origine : CI, D'après une idée de François Drouin, Irem de Lille, (voir revue APMEP 2003)

7. CARTES CARRÉES (Cat. 4, 5, 6)

Grégory a 81 cartes carrées, de même dimension, avec une face blanche et l'autre face grisée.
Il les dispose toutes, les unes contre les autres, pour obtenir un grand carré entièrement blanc.
Thomas lui propose un défi : *Essaie de retourner le plus possible de cartes pour faire apparaître leur face grisée.*
Mais attention, à la fin, chaque face grise devra avoir au moins 7 faces voisines blanches.

Deux cartes sont voisines si elles ont un sommet ou un côté commun.

(Dans cet exemple, les cartes A et C avec les faces grises ont 7 voisines avec des faces blanches, et D en a 8, mais B n'en a que 6 !)



Combien de cartes Grégory peut-il retourner au maximum ?

Expliquez votre raisonnement et dessinez une de vos solutions.

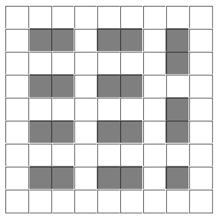
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : positions relatives de carrés dans un quadrillage
- Logique et raisonnement : recherche d'une disposition maximale

Analyse de la tâche

- Comprendre que le carré initial est un quadrillage de 9 x 9, dont toutes les cases sont blanches.
- Comprendre que l'expression « au moins 7 » se traduit ici par 7 ou 8.
- Comprendre que les cartes retournées ne peuvent pas être celles du bord car elles n'auraient que 5 voisines blanches, ni celles des angles car elles n'auraient que 3 voisines blanches.
- Se rendre compte que les faces grises « isolées » à l'intérieur de la grille ont chacune 8 voisines blanches et répondent ainsi à la condition. Si toutes les faces grises étaient isolées, on pourrait en placer au maximum 16, régulièrement.
- Se rendre compte ensuite que deux faces grises peuvent avoir un côté ou un sommet commun et, par exemple, former un rectangle de 2 x 1. On peut ainsi placer 10 rectangles de ce type, isolés les uns des autres, et une face grisée seule, ce qui fait monter le nombre total des cases grisées à 21.



Attribution des points

4 Réponse optimale (21) avec explications et une grille correctement dessinée
3 Réponse optimale (21) avec explication peu claire et sans dessin
ou réponse « 20 » avec explications ou dessin
2 Réponse optimale (21) sans explication ni dessin
1 Réponse (20) sans explications ni dessin
ou réponse (différente de 21 et 20) avec dessin respectant la condition de voisinage
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4 - 5 - 6

Origine : Rencontre de Bourg-en-Bresse, sur une idée de Suisse romande

8. UNE CROISSANCE EXTRAORDINAIRE (Cat. 5, 6, 7)

Quand ils vivaient dans notre pays, Hugues mesurait 115 cm, Léo 130 cm, Sara 135 cm, Eddy 145 cm.

Depuis quelques années ils vivent dans un autre pays nommé « Biengrandir », où l'unité de mesure est le *gra*.

Aujourd'hui, ils se mesurent et ils voient que Hugues a grandi de 7 *gra*, Léo de 6 *gra*, Sara et Eddy ont grandi chacun de 3 *gra*.

Sara s'aperçoit d'une chose étrange : maintenant ils n'ont plus quatre tailles différentes, mais deux enfants ont la même taille et les deux autres aussi.

Trouvez à combien de cm correspond le *gra*.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Mesure de grandeurs : unités conventionnelles et non conventionnelles
- Arithmétique : addition et multiplication

Analyse de la tâche

- Chercher quels peuvent être les enfants de même taille : Sara et Eddy ne peuvent pas l'être, il reste deux possibilités, Hugues-Sara et Léo-Eddy ou Hugues-Eddy et Léo-Sara.
- Dans la première hypothèse, la différence de 20 cm (135 – 115) entre Sara et Hugues serait compensée par une différence de 4 *gra* (7 – 3), ce qui donnerait 5 cm pour 1 *gra*, et la différence de 15 cm (145 – 130) entre Eddy et Léo serait compensée par la différence de 3 *gra* (6 – 3), ce qui donne aussi 5 cm pour 1 *gra*.

  Dans la seconde hypothèse, la différence de 5 cm (135 – 130 entre Sara et Léo serait compensée par une différence de 3 *gra* (6 – 3), ce qui donnerait 5/3 cm pour 1 *gra*, et la différence de 30 cm (145 – 115) entre Eddy et Hugues serait compensée par la différence de 4 *gra* (7 – 3), ce qui donnerait 7,5 cm pour 1 *gra*, en contradiction avec la précédente.

  La seconde hypothèse est à rejeter et la première conduit à la correspondance 1 *gra* = 5 cm.

Ou : Procéder de manière systématique, en attribuant des valeurs successives au *gra*, en cm, calculer les tailles des enfants quand ils ont grandi comme indiqué, et observer les résultats :

	Taille atteinte par chacun en cm :			
valeur, en cm, à attribuer au *gra*	HUGUES	LÉO	SARA	EDDY
1	7x1+115=122	6x1+130=136	3x1+135=138	3x1+145=148
2	7x2+115=129	6x2+130=142	3x2+135=141	3x2+145=151
…	…	…	…	…
5	7x5+115=**150**	6x5+130=**160**	3x5+135=**150**	3x5+145=**160**
6	157	166	153	163
7	164	172	157	167
8	171	178	160	170

- Comprendre que, si on continue à donner d'autres valeurs au *gra*, il ne sera plus possible d'avoir deux paires de personnes de la même taille : Sara et Eddy auront toujours la même différence de taille, Léo a dépassé Sara entre 1 et 2 cm et Eddy à 5 cm, Hugues a dépassé Sara à 5 cm et Eddy entre 7 et 8 cm.

Ou : procéder en faisant des essais au hasard, sans alors pouvoir conclure à l'unicité de la solution.

Attribution des points

4 Réponse correcte avec explication claire montrant que la réponse : 1 *gra* = 5 cm, est bien déterminée et unique

3 Réponse correcte obtenue par essais systématiques sans justification montrant que tous les cas ont été examinés

2 Réponse correcte obtenue par essais au hasard
ou essais systématiques mais avec erreurs de calculs

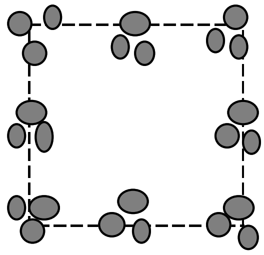
1 Début de raisonnement correct (quelques essais au hasard, avec vérification, mais n'aboutissant pas)

0 Incompréhension du problème

Niveau : 5 - 6 –7 **Origine :** Val d'Aoste

9. UN ŒIL SUR LES PIERRES ! (Cat. 5, 6, 7)

Julien est en vacances à la mer. Sur la plage, il ramasse des pierres et les dispose par petits tas de trois, en forme de carré, comme sur ce dessin :



Selon cette disposition, il y a 9 pierres par côté.

Julien ramasse encore 4 autres pierres et, avec les premières, forme une nouvelle disposition :

- il y a de nouveau 8 tas, disposés en carré ;
- il y a de nouveau 9 pierres par côté ;
- il y a le même nombre de pierres dans tous les tas situés au milieu des côtés du carré.

Combien peut-il y avoir de pierres dans les tas de la nouvelle disposition ?

Montrez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, décomposition d'un nombre
- Géométrie

Analyse de la tâche :

- Comprendre que le même nombre de pierres, 9 sur un côté, peut être obtenu avec de nombreux triplets différents et, éventuellement, en dresser l'inventaire : 1-1-7, 1-2-6, 1-3 5, 1-4-4, 2-2 5, 2-3-4, 3-3-3.
- Par des essais, se rendre compte que chacun de ces triplets peut conduire à des carrés de 9 pierres sur les côtés et avec un même nombre de pierres au milieu des côtés. Par exemple, avec les nombres (on peut le faire aussi avec des dessins) :

a

1	1	7
1		1
7	1	1

b

1	7	1
7		7
1	7	1

c

1	3	5
3		3
5	3	1

d

1	**5**	**3**
5		**5**
3	**5**	**1**

e

2	2	5
2		2
5	2	2

f

2	**5**	**2**
5		**5**
2	**5**	**2**

- Parmi toutes les dispositions données dans les exemples, et les autres, retenir celles dont la somme est 28, c'est-à-dire les deux dispositions d et f.

Ou : Commencer par la condition « 28 pierres au total » en remarquant que deux côtés parallèles utilisent 9 pierres chacun en 6 tas et laissent 10 pierres (28 – (2 x 9) = 10) pour les deux tas du milieu des autres côtés et en en déduisant qu'il y a 5 pierres dans les tas du milieu.

- Il ne reste plus alors que les deux triplets 1-5-3 et 2-5-2 à examiner.

Attribution des points

4 Réponse exacte (les deux dispositions « d » et « f » des exemples précédents) : production des deux solutions avec liste des nombres ou dessin, avec explication

3 Une seule solution trouvée et expliquée

ou les deux dispositions « d » et « f » avec une troisième qui est isométrique à « d » par une rotation d'un quart de tour (où la ligne supérieure est « 3-5-1 »)

2 Deux solutions trouvées mais sans explications

1 Une seule solution trouvée sans explications

ou une ou plusieurs solutions ne respectant pas l'une des consignes (comme « a », « b », « c », « e » par exemple)

0 Incompréhension du problème

Niveau : 5 - 6 - 7

Origine : Genova

10. LA PLUS PETITE DIFFÉRENCE (Cat. 5, 6, 7)

Cette grille est partagée en deux régions par une ligne continue, épaisse, qui suit le quadrillage. Lorsqu'on additionne les nombres de chacune de ces régions, on constate que la différence entre les deux sommes obtenues est 39.

3	15	16	22
7	13	2	43
40	30	35	17
19	18	12	5

Il est possible de trouver une différence plus petite en découpant la grille en deux parties seulement, selon d'autres lignes.

Dessinez la ligne de partage qui donne la plus petite différence possible et notez vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition de nombres et compensations
- Logique et raisonnement : organisation des échanges entre cases

Analyse de la tâche

- Vérifier la donnée en effectuant les sommes
- Effectuer des essais et chercher à améliorer le résultat par compensation (par exemple, sur la grille donnée, voir qu'en faisant passer la case « 16 » dans la partie de gauche, la différence diminue de 32)
- Constater que, la somme étant de 297, on n'arrivera pas à une différence inférieure à 1, entre 149 et 148. Une solution consiste à échanger le « 15 » qui passe à droite, contre le « 30 » et le « 5 » qui passent à gauche.

  Solutions optimales : il y a au moins ces deux-là, avec 148 et 149

3	15	16	22
7	13	2	43
40	30	35	17
19	18	12	5

3	15	16	22
7	13	2	43
40	30	35	17
19	18	12	5

Attribution des points

4 Une solution minimale, avec dessin et sommes conduisant à 148 et 149

3 Une solution avec une différence de 3 avec dessin correct et sommes de 147 et 150 ou la solution minimale, sans toutes les explications demandées

2 Une solution avec une différence de 5 avec dessin correct et sommes de 146 et 151 ou la solution avec une différence de 3, sans toutes les explications demandées

1 Une solution avec une différence de 7 ou 9 avec dessin correct et sommes de 144 ou 145 et 153 ou 155 ou autres solutions avec fautes de calcul

0 Incompréhension du problème ou aucune solution meilleure trouvée

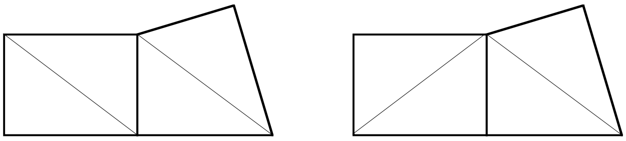
Niveau : 5 - 6 - 7

Origine : 6e RMT (sur une idée de Bourg-en-Bresse)

11. QUADRITRIANGLES (Cat. 6, 7, 8, 9)

Avec quatre triangles rectangles égaux, de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm, disposés de manière à ce que chaque triangle ait au moins un côté commun avec un autre triangle, on peut obtenir différentes figures que nous appellerons « quadritriangles ».

Deux quadritriangles sont différents s'ils ont au moins un côté ou un angle différent (on ne tient pas compte de la disposition des triangles à l'intérieur). Par exemple, ces deux quadritriangles, de 22 cm de périmètre, ne sont pas considérés comme différents.



Parmi tous les quadritriangles, quels sont ceux qui ont le plus petit périmètre ?
Dessinez-les et expliquez comment vous les avez trouvés.

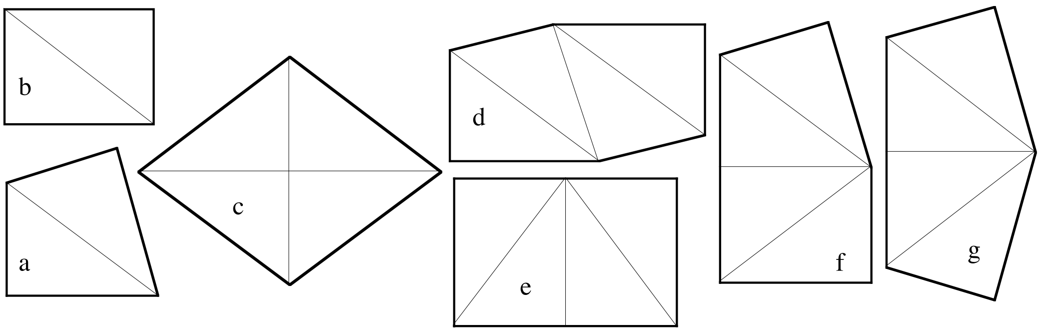
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication
- Géométrie : polygones, équivalence, périmètre

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé et comprendre les règles de formation des figures.
- Considérer que, s'il n'y avait pas de côtés communs, le périmètre du quadritriangle serait 4 x 12 = 48. À ce résultat, il faut ensuite soustraire deux fois la mesure de chaque côté en commun.
- Observer qu'il ne peut y avoir que 3 ou 4 côtés communs. Dans le premier cas, pour obtenir le périmètre minimum, il faut avoir deux couples de côtés de 5 et un couple de côtés de 4 en commun. Dans le second cas, deux couples de côtés de 3 et deux couples de côtés de 4.
- Construire les quadritriangles avec les côtés communs ainsi déterminés. Observer qu'il y a toujours deux manières de disposer deux triangles une fois que leur côté commun a été choisi. Par exemple, pour deux triangles ayant l'hypoténuse en commun, la disposition fait apparaître une symétrie axiale ou une symétrie centrale comme le montrent les figures a et b ci-dessous.
- On peut aussi procéder de manière empirique, en découpant les triangles et recomposant les figures.
  On obtient ainsi les 5 possibilités c, d, e, f, g, ayant toutes un périmètre de 20 cm (48 - 28)



Attribution des points

4 Les cinq quadritriangles corrects (de périmètre 20 cm : c, d, e, f, g) avec des explications claires sur le fait que les figures ont un périmètre minimum

3 Les cinq quadritriangles corrects, avec des explications peu claires ou incomplètes
ou quatre quadritriangles différents avec des explications claires sur le périmètre
ou les cinq quadritriangles avec une répétition

2 Au moins trois quadritriangles corrects sans explications ou au moins deux avec explications

1 Un seul quadritriangle correct trouvé ou un début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6 - 7 - 8 - 9

Origine : Parma

12. LES DANSEUSES (Cat. 6, 7, 8, 9)

Chiara a envoyé cette photo à Stéphanie, sa correspondante française.

Elle a pensé qu'elle pourrait se faire reconnaître de sa nouvelle amie par les indices qu'elle lui donnerait et, dans le même temps, lui présenter les camarades de son groupe de danse. Elle lui a donc écrit ceci :

Chère Stéphanie,

Je t'envoie une de mes photos préférées car j'y danse avec mes amies.

C'est Francesca qui a les bras au-dessus de la tête, qui lève la même jambe que moi et qui a le même tutu qu'Elena ;

Elena lève la même jambe que Giorgia ;

Giorgia a le même tutu que Paola;

le tutu de Paola est différent de celui d'Ilaria;

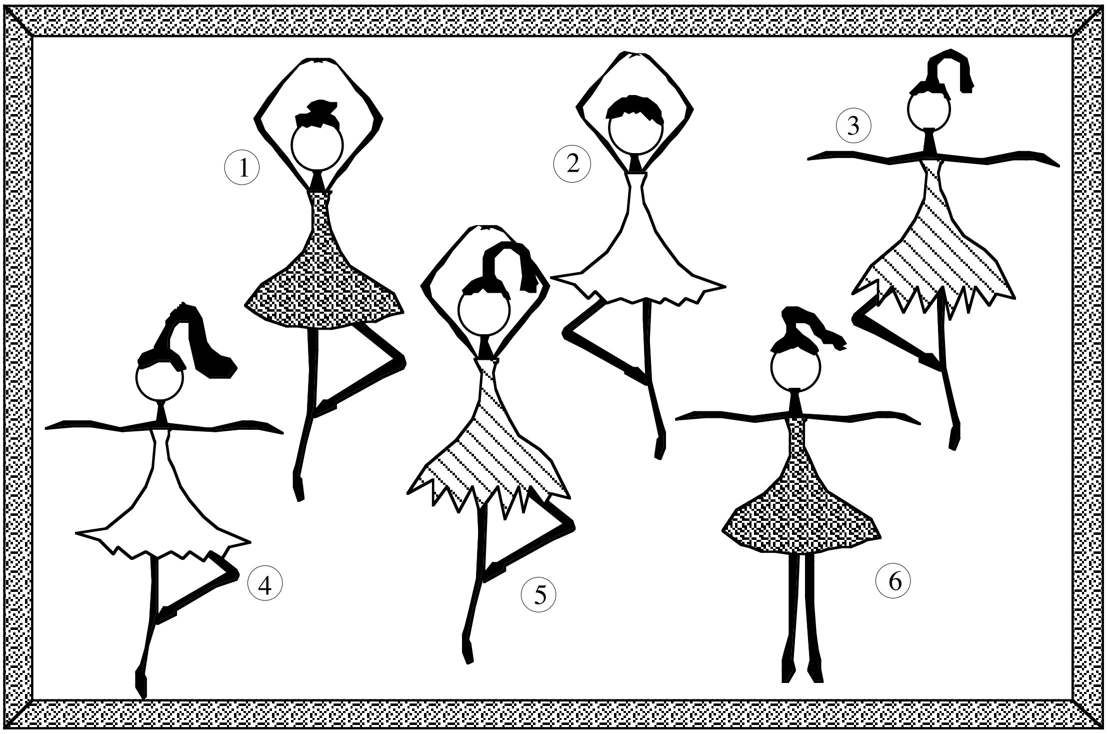
mon tutu est le même que celui d'Ilaria et tu vois que mes bras ne sont pas dans la même position que ceux de Paola !

J'espère recevoir ta réponse au plus vite, avec les noms correspondant à chaque numéro, pour savoir si tu m'as reconnue.

Chiara

Aidez Stéphanie à identifier Chiara et ses amies.

Expliquez votre raisonnement.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : négation, affirmation, hypothèses

Analyse de la tâche

- De la première information, on sait que Francesca peut être la danseuse 1, 2 ou 5, ce qui laisse la place aux hypothèses suivantes :

Si Francesca est la **1**, Chiara peut être la **4** ou la **5**, Elena serait nécessairement la **6** mais comme elle n'a aucune jambe levée, il y a une contradiction avec l'information « *Elena lève la même jambe que Giorgia* » et cette hypothèse est à rejeter.

Si Francesca est la **2**, Chiara ne peut être que la **3** et Elena la 4. En suivant cette hypothèse on arrive à la combinaison : (1. Giorgia, 2.Francesca, 3 Chiara, 4 Elena, 5 Ilaria, 6 Paola) que l'on doit exclure parce qu'elle est en contradiction avec la dernière information selon laquelle Chiara a ses bras dans une position différente de ceux de Paola.

Si Francesca est la **5**, Elena est nécessairement la **3** et Giorgia la **2,** Chiara pourrait être la **1** ou la **4,** on arrive à la solution correcte :1 Chiara, 2 Giorgia, 3 Elena, 4 Paola, 5 Francesca, 6 Ilaria, et on vérifie qu'elle est unique car si Chiara était la **4,** elle ne pourrait pas avoir le même tutu qu'Ilaria.

Ou : Partir d'une autre information, par exemple : *Giorgia a le même tutu que Paola*, qui conduit aussi à trois hypothèses à examiner l'une après l'autre pour savoir si elles sont acceptables.

Ou : trouver la solution par hasard, sans hypothèses et déductions, mais avec une vérification qu'il n'y a pas d'autre solution (par exemple avec un inventaire de tous les cas possibles respectant l'une des informations)

Attribution des points

4 La solution correcte avec explications complètes (les hypothèses indiquées ou un inventaire complet des essais)

3 La solution correcte avec explications incomplètes ou peu claires (mais qui permettent de se rendre compte que la solution est unique)

2 Solution (erronée), respectant toutes les conditions, sauf une, avec explications
ou solution correcte trouvée au hasard, (avec vérification, mais trace de la recherche de l'unicité)

1 Solution erronée avec deux conditions non respectées

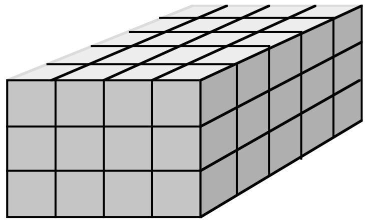
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6 - 7 - 8 - 9

Origine :Parma

13. LES GOURMANDS (Cat. 7, 8, 9)

Madame Caramel, la prof. de maths, a fait un pavé au chocolat. Après avoir fait cuire une pâte à biscuit ordinaire dans un moule, elle l'a trempée dans du chocolat liquide pour recouvrir les six faces d'une épaisse couche délicieuse.



Pour expliquer la formule du volume du parallélépipède rectangle, elle découpe son pavé en cubes de mêmes dimensions : 3 dans la hauteur, 4 dans la largeur et 5 dans la longueur.

À la fin de la leçon, elle met les cubes sur un plateau et chacun des 30 élèves a le droit de choisir deux cubes.

Pour éviter que ses élèves, tous très gourmands, ne se ruent sur les cubes ayant le plus de chocolat, Madame Caramel organise le partage ainsi, après avoir donné un numéro à chaque élève :

- *pour commencer, chacun ira choisir un cube, dans l'ordre des numéros, le numéro 1 en premier, puis le numéro 2 … et enfin le numéro 30.*
- *lorsque chacun aura mangé son premier cube, chacun ira en chercher un second, mais dans l'ordre inverse : le numéro 30 en premier, puis le numéro 29 … et enfin le numéro 1.*

Quelques élèves ont un grand sourire car ils savent qu'ils auront plus de chocolat que les autres.

Quels sont les élèves qui auront plus de chocolat que les autres ?

Indiquez leurs numéros, expliquez ce qu'ils ont eu de plus et comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie :parallélépipède rectangle et cube
- Arithmétique : addition et soustraction

Analyse de la tâche

- Vérifier qu'il y a bien 60 cubes et comprendre qu'ils peuvent avoir 0, 1, 2 ou 3 faces en chocolat; comprendre que c'est le critère "nombre de faces en chocolat" qui va déterminer les choix et se rendre compte qu'il faut connaître le nombre de cubes de chaque type.
- Déterminer le nombre de cubes à 3 faces : 8, un par sommet; le nombre de cubes à 2 faces : (3 + 2 + 1) x 4 = 24 sur les arêtes; le nombre de cubes à 1 face : (6 + 3 + 2) x 2 = 22 à l'intérieur des faces; le nombre de cubes sans chocolat, à l'intérieur du pavé : 1 x 2 x 3 = 6.

  Cette détermination peut se faire par comptage sur le dessin, par comptage sur un modèle, par calculs, …
- Noter que, au premier tour, les 8 premiers (1 à 8) vont prendre les cubes à 3 faces et que les 22 suivants (9 à 30) prendront des cubes de deux faces en chocolat. Pour le second tour, il restera alors 2 cubes à deux faces chocolatées pour les deux premiers (30 et 29) 22 cubes à une face en chocolat (28 à 7) et 6 cubes sans chocolat pour les numéros 6 à 1.
- Vérifier que les 60 cubes ont bien été distribués et faire les comptes : tous auront 3 faces chocolatées à l'exception des numéros 7 et 8 (4 faces : 3 + 1) et des numéros 29 et 30 (avec 4 faces également, 2 + 2).

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (7 et 8, 29 et 30 avec 4 faces au chocolat, une de plus que les autres qui auront tous 3 faces chocolatées) avec explications complètes

3 Réponse correcte et complète (7 et 8, 29 e 30 avec 4 faces au chocolat), mais avec explications incomplètes
ou la réponse correcte avec explications, pour les numéros, mais sans le nombre de faces

2 Réponse incomplète (« 29 et 30 avec 4 faces » ou « 7 et 8 avec 4 faces) avec explications (sans voir qu'il y a quatre élèves dans cette situation

1 Début de recherche organisée mais non aboutie (erreur dans le comptage des différents cubes...)

0 Incompréhension du problème

Degrés : 7 - 8 - 9

Origine : Cantone Ticino + CI

14. À TABLE ENSEMBLE (Cat. 7, 8, 9)

Tymer, Sejko et Annòvic travaillent pour la même entreprise FUSEAURAIR qui a des filiales dans le monde entier. Tymer travaille à Anchorage, Sejko travaille à Tokyo et Annòvic travaille à Moscou.

Un jour à midi, heure locale au siège central de l'entreprise FUSEAURAIR, le président-directeur général, Monsieur Clock, demande à ses trois collaborateurs de participer à une vidéo conférence.

Monsieur Clock découvre avec surprise que ses trois collaborateurs sont tous en train de manger, selon le fuseau horaire de la ville où chacun se trouve, l'un prenant son petit-déjeuner à 8 h, l'autre son déjeuner à 14h et le troisième son dîner à 20 h.

M. Clock a devant lui une carte du monde avec les fuseaux horaires et y lit :

– 11.00 Samoa	– 10.00 Tahiti	– 9.00 Anchorage
– 8.00 San Francisco	– 7.00 Denver	– 6.00 Mexico-City, Chicago
– 5.00 Havana, New York	– 4.00 Caracas	– 3.00 Buenos Aires, San Paolo
– 2.00 South Georgia	– 1.00 Azores	0.00 London
+ 1.00 Paris	+ 2.00 Cape Town	+ 3.00 Moscow
+ 4.00 Dubai	+ 5.30 New Delhi	+ 6.00 Dacca
+ 7.00 Bangkok	+ 8.00 Beijing	+ 9.00 Tokyo
+10.00 Sydney	+ 11.00 Vanuatu Island	+ 12.00 Auckland

Où se trouve, selon vous, le siège central de l'entreprise FUSEAURAIR ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : différences et nombres relatifs
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Constater, à la lecture des données, que l'heure d'Anchorage est 12 heures en retard par rapport à l'heure de Moscou, qui, à son tour, a 6 heures de retard sur celle de Tokyo.
- Déterminer les six permutations possibles des trois types de repas (Petit déjeuner, Déjeuner et Dîner) et constater qu'il n'y en a qu'une d'acceptable par un tableau de ce genre ou à l'aide d'un axe gradué.

Tymer (0)	Annòvic (+12)	Sejko (+18)	
Petit-déjeuner (8)	Déjeuner (14)	Dîner (20)	non acceptable
Petit-déjeuner (8)	Dîner (20)	Déjeuner (14)	non acceptable
Déjeuner (14)	Dîner (20)	Petit déjeuner (8)	non acceptable
Déjeuner (14)	Petit déjeuner (8)	Dîner (20)	non acceptable
Dîner (20)	Petit déjeuner (8)	Déjeuner (14)	acceptable
Dîner (20)	Déjeuner (14)	Petit déjeuner (8)	non acceptable

- Le siège de l'entreprise est à Bangkok parce que si Sejko déjeune à 14h, à ce moment, il est 12h à Bangkok, 20h (du jour précédent) à Anchorage et 8h à Moscou.

Ou procéder par essais : supposant par exemple que ce soit Tymer qui prend son petit-déjeuner, déterminer la ville où il est midi quand il est 8 h à Anchorage et déduire que Annòvic peut dîner, mais que Sejko ne peut déjeuner à ce moment.

Attribution des points

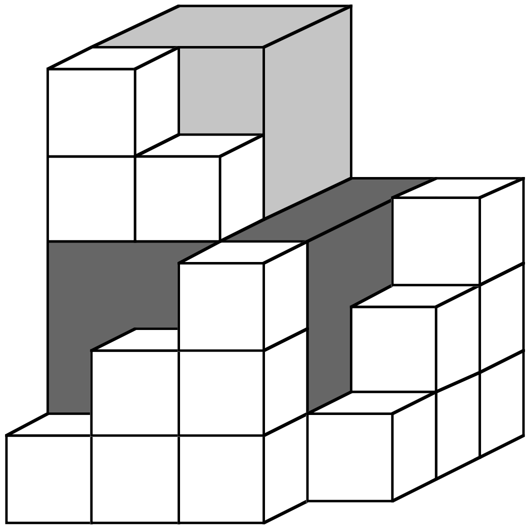
4 Réponse exacte (Bangkok) avec explications claires et cohérentes
3 Réponse exacte avec explications incomplètes
2 Réponse exacte sans aucune explication
1 Début de recherche
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7 - 8 - 9

Origine : Siena + Parma

15. LA TOUR DE TRANSALPIE (Cat. 8, 9)

Le roi de Transalpie aime beaucoup les cubes. Il a fait ériger cette tour, dans laquelle on reconnaît facilement 17 cubes.



Pour construire la tour, les maçons ont empilé et cimenté exactement 50000 briques cubiques avant de peindre les parties visibles : en noir pour le grand cube, en gris pour le moyen et en blanc pour les 15 petits, avec le dessin de toutes les arêtes.

La hauteur totale de la tour, du sol à la face supérieure du cube moyen, est de 20 mètres.

Un des courtisans a trouvé cette tour si belle qu'il en a fait construire une dans son jardin, tout à fait semblable mais de dimensions réduites.

Son modèle réduit n'a que 8 mètres de hauteur. Il est construit avec les mêmes briques que celles utilisées pour la tour royale.

Combien de briques le courtisan a-t-il utilisées pour construire sa tour ?

Expliquez votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, puissances, rapports, proportionnalité
- Géométrie : cube, volume du cube, rapport de volumes dans une similitude

Analyse de la tâche

- Pour les élèves qui sauraient ou qui pressentiraient que le rapport des volumes est le cube du rapport de similitude de la tour royale à son modèle 8/20 = 2/5, il suffit d'effectuer le calcul : $50000 \times (2/5)^3 = 3200$
- Pour les autres, il faut passer par des observations, des comparaisons de volumes et la détermination de l'arête des briques :

  Calculer le volume de la tour avec les petits cubes comme unité : $15 + 2^3 + 3^3 = 15 + 8 + 27 = 50$, ce qui permet de déduire que chaque cube unité est composé de 1000 briques ($10 \times 10 \times 10$).

  Comme on peut placer 5 petits cubes dans la hauteur de la tour, celle-ci (20 mètres) correspond alors à celle de 50 briques, ce qui permet de calculer la mesure de l'arête d'une brique : 20 : 50 = 0,4 (en mètres).

  Le modèle réduit a aussi un volume de 50, mais en unités « petits cubes réduits ». Sa hauteur (8 mètres) est aussi celle de 5 « petits cubes réduits » dont l'arête sera 8 : 5 = 1,6 (en mètres). Comme $1{,}6 = 4 \times 0{,}4$, les « petits cubes réduits » seront composés de $4 \times 4 \times 4 = 64$ briques. Et il faudra $64 \times 50 = 3200$ briques pour construire le modèle réduit.

Attribution des points

4 La réponse juste 3200 briques avec des explications

3 La réponse juste 3200 briques, sans explications
ou une seule erreur de calcul, avec explications

2 Décompte des petits cubes dans la tour et détermination des dimensions d'un petit cube ($10 \times 10 \times 10$) et poursuite du raisonnement non aboutie

1 La réponse « 20000 briques », correspondant à une confusion entre rapport de similitude et rapport des volumes

0 Incompréhension du problème ou rapport faux avec une autre erreur

Niveaux : 8 - 9

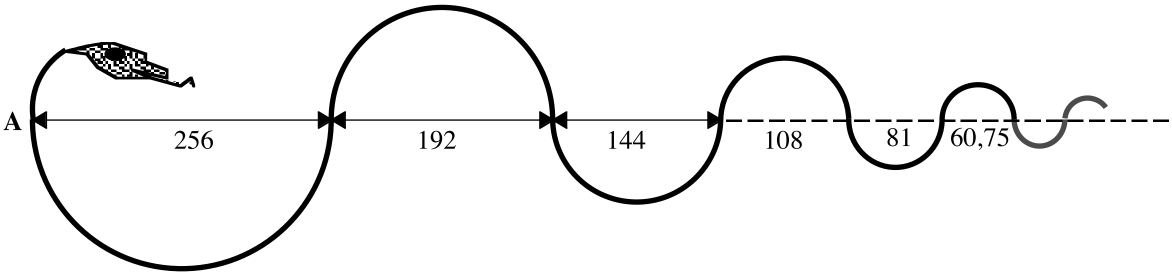
Origine : C.I.

16. LE SERPENT MYOPE (Cat. 8, 9)

Monsieur Python est en train de s'admirer.

Il constate que son corps forme des demi-cercles, dont les diamètres décroissent régulièrement, toujours dans le même rapport : 256 ; 192 ; 144 ; 108 ; 81 ; 60,75 ; … (en mm)

Mais il est myope et, à partir des 5 à 6 premiers demi-cercles, il ne voit plus rien et n'aperçoit donc pas le bout de sa queue.



Selon vous, quelle est la distance, en mm, entre son cou, au point A, et le bout de sa queue ?

Estimer la longueur de son corps, du point A jusqu'au bout de sa queue.

Combien y a-t-il de demi-cercles que le serpent myope n'arrive pas à voir ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

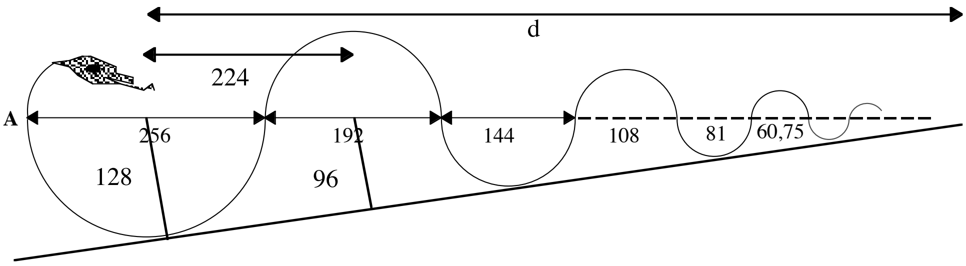
Domaine de connaissances

- Géométrie : longueur de cercle, Thalès,
- Arithmétique : calcul de la somme des termes d'une série géométrique
- Approche de l'analyse

Analyse de la tâche

Il y a plusieurs moyens de trouver la distance demandée :

- On peut faire une construction précise, avec ou sans agrandissement des demi-cercles, remarquer que les tangentes aux demi-cercles en haut et en bas se rejoignent à l'extrémité, et obtenir une bonne approximation de la longueur par une simple mesure.
- On peut calculer la longueur en mobilisant les connaissances sur les homothéties / agrandissements (ou (Thalès) après avoir constaté que les demi-cercles sont homothétiques et que le centre d'homothétie est l'extrémité de la queue : d/128 = (d.- 224)/96 => d = 996 et la longueur est 996 + 128 = 1024.



- On peut aussi calculer le rapport –mentionné dans l'énoncé - d'un diamètre au suivant : 192/256 = 144/192 = 108/144 = … = 3/4, pour trouver les termes suivants de la suite et calculer une approximation de leur somme des termes de la suite : 256 + 192 + 144 + 108 + 81 + 60,75 + 45,5625 + à la calculatrice. (On arrive à 966 après 10 termes, 1010 après 15 termes, 1020 après 20 termes, 1023 après 25 termes, …)
- Le calcul des deux sommes S = 256 + 256(3/4) + 256 $(3/4)^2$ + … et (3/4)S = 256(3/4) + 256 $(3/4)^2$ + …. et de leur différence : S - (3/4)S = 256 qui se réduit à (1/4)S = 256 puis à S = 1024 n'est vraisemblablement pas à la portée des élèves de catégorie 8. (À condition d'être convaincu que ça converge !!!).

La longueur du serpent est plus délicate.

Les élèves peuvent éventuellement y arriver en remplaçant la suite géométrique 256, 192, 144, … par la suite correspondante des longueurs des demi-cercles : $128\pi + 96\pi + 72\pi + … = 512\,\pi \approx 1600$

La question du nombre de demi-cercles est plus intéressante.

On peut s'attendre à « beaucoup, beaucoup », « autant qu'on en veut », « des centaines ou des milliers », « une infinité » , montrant que le concept d'infinité a été abordé dans la réflexion des élèves.

Pour les deux dernières questions, le mathématicien y verra une approche de l'infini, mais le zoologue (et beaucoup d'élèves) savent bien que le serpent a un corps de longueur finie. Il s'agit donc de quitter les contraintes de la réalité physique pour passer à la fiction mathématique.

Attribution des points

4 Les 3 réponses « acceptables » (distance 1024 ou une approximation comprise entre 1000 et 1050, longueur 512 $\pi \approx$ 1600 ou une approximation correspondante, « beaucoup, beaucoup » ou une réponse montrant une présence de la notion d'infini), avec explication

3 Les 3 réponses « acceptables » : mais avec justifications insuffisantes ou des approximations trop éloignées de la réponse correcte

2 2 réponses « acceptables » expliquées ou 3 réponses « acceptables »sans aucune justification

1 1 réponse « acceptable » expliquée ou 2 réponses non justifiées

0 Incompréhension du problème

Degrés : 8 – 9

Origine : CI et «Gruppo Zeroallazero »

17. LOGOS (Cat. 8, 9)

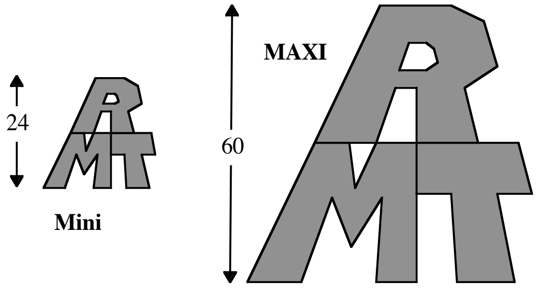
Une grande entreprise internationale de loisirs a créé un logo autocollant pour sa publicité.

Le modèle « Mini » a 24 cm de hauteur.

Le modèle « MAXI » a 60 cm de hauteur.

Les deux modèles sont imprimés sur des mêmes feuilles de plastique aux couleurs chatoyantes et aux reflets métallisés, puis découpés à la presse et livrés par lots de 10, 20, 40, 50 ou 100 modèles.

Un lot de 100 modèles « Mini » pèse 450 g.



Combien pèse un lot de 40 modèles « MAXI » ?

Expliquez votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : rapports, proportionnalité
- Géométrie : rapport des aires dans un agrandissement

Analyse de la tâche

- Comprendre que la masse des autocollants est proportionnelle à leur aire, puisqu'elles sont découpées dans les mêmes feuilles de plastique (de même épaisseur) et que les deux figures sont semblables, ce qui signifie que le rapport de deux distances correspondantes est le même, quelle que soit la direction.
- Calculer la masse d'un modèle « Mini » : 450 : 100 = 4,5 (en grammes)
- Calculer le rapport de proportionnalité : 60/24 = 5/2 = 2,5 des deux figures
- Calculer le rapport des aires des deux figures : de manière « experte » : $2{,}5^2 = 6{,}25$;

  ou, en imaginant que le petit logo est inscrit par exemple dans un carré de côté 24, d'aire $24^2 = 576$, que le grand logo est inscrit dans un carré de côté 60, d'aire $60^2 = 3600$ et calculer le rapport 3600/576 = 6,25 ;

  ou en prenant les mesures d'une des lettres, comme le « T » et en calculant l'aire du petit et du grand pour déterminer le rapport.
- Calculer la masse d'un modèle « MAXI » : 4,5 x 6,25 = 28,125 (en grammes) et la masse d'un lot de 40 modèles : 28,125 x 40 = 1125 (en grammes)

Ou : après avoir calculé le rapport de similitude et son carré, calculer la masse de 100 modèles MAXI ☹2,5 x 450 = 2812,5) trouver la masse d'un lot de 40 modèles : (2812,5 x 40/100) = 1125

Attribution des points

4 La réponse juste 1125 grammes avec des explications

3 La réponse juste 1125 grammes sans explications
ou une seule erreur de calcul (dans l'un des rapports (5/2 et 40/100 ou dans l'élévation au carré, ….) ou encore une réponse approchée au cas où le rapport des aires a été estimé

2 La réponse 2812,5 correspondant à la masse d'un lot de 100 feuilles « MAXI » au lieu de 40, avec ou sans explications
ou une réponse proche au cas où le rapport des aires a été estimé

1 La réponse 450 (450 x 5/2 x 40/100) grammes, correspondant à une confusion entre rapport de similitude et rapport des aires

0 Incompréhension du problème ou rapport faux avec une autre erreur

Niveaux : 8 - 9

Origine : C.I.