No	Titre	3	4	5	6	7	8	9	10	Ar.	Alg.	Ge.	Lo.	Orig.
1.	Les pièces d'Émilie	3								x			x	SR
2.	Puzzle de quatre triangles (I)	3										x		CI
3.	Bicyclettes et tricycles	3	4							x				RZ
4.	La maison d'Élise	3	4							x			x	SI+PR
5.	Le classement	3	4	5									x	Ext+CI
6.	Chiffres rouges et chiffres noirs		4	5						x				RMR
7.	La boucle		4	5						x		x		CI
8.	Puzzle de quatre triangles (II)		4	5	6							x		CI
9.	Panneaux routiers			5	6					x		x		Ext+CI
10.	Garçon, l'addition !			5	6					x				PR
11.	Fouilles archéologiques			5	6	7				x		x		SI
12.	Les confitures				6	7	8			x				Gr.proport.
13.	Zéro perdant				6	7	8			x				Ext+CI
14.	Toujours 6 (I)				6	7	8			xx				CI
15.	Ruban adhésif					7	8	9	10			x	x	SS
16.	Les hexagones de René					7	8	9	10	x		x		BE
17.	Nombres impairs					7	8	9	10	x			x	SI
18.	RMT 2007						8	9	10	x		x		CI
19.	L'apéritif							9	10			x		PR
20.	Toujours 6 (II)							9	10	xx				CI
21.	Une rencontre virtuelle							9	10			xx		PR

1. LES PIÈCES D'ÉMILIE (Cat. 3)

Dans sa tirelire, Émilie n'a que des pièces de 5, 10, 20 ou 50 centimes. Elle en prend huit et remarque qu'elle a exactement 1 euro.

Quelles sont les huit pièces qu'Émilie peut avoir prises dans sa tirelire ?

Écrivez toutes vos solutions.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique : nombres naturels, addition et multiplication, dénombrement
- Organisation d'une recherche

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de combiner des pièces (dont on ne connaît que le nombre total) en multipliant leur nombre par la valeur de la famille dont elles font partie, de manière à obtenir 100 centimes (= 1 euro) par addition des produits partiels.
- Comprendre que seules les valeurs 5, 10, 20 et 50 et leurs multiples interviennent.
- Comprendre que les conditions du problème n'imposent pas d'avoir tous les types de pièces représentés dans chaque combinaison.
- Comprendre qu'il ne peut pas y avoir que des pièces de 5 centimes car avec huit pièces, on n'arriverait qu'à 0,40.
- Comprendre qu'il ne peut pas y avoir que des pièces de 10 centimes car avec huit pièces, on n'arriverait qu'à 0,80.
- Comprendre qu'on ne peut utiliser qu'une seule pièce de 50 centimes.
- Avoir remarqué qu'on peut obtenir 0,30 € avec trois pièces de deux manières : trois pièces de 10 centimes ou une pièce de 20 centimes et deux pièces de 5 centimes.
- Comprendre que les pièces de 5 centimes seront forcément en nombre pair.
- Se rappeler qu'on utilise 8 pièces dans chaque recherche de combinaison.
- Trouver les 5 combinaisons possibles, c'est-à-dire :

a)	5	5	10	10	10	20	20	20
b)	5	5	5	5	10	10	10	50
c)	5	5	5	5	20	20	20	20
d)	10	10	10	10	10	10	20	20
e)	5	5	5	5	5	5	20	50

Attribution des points

4 Les 5 solutions exactes sont mentionnées

3 4 solutions correctes,
ou les 5 solutions exactes, avec présence de doublons

2 Au moins 4 solutions qui font toutes 1 euro sont trouvées, mais dont une ou deux comportent un nombre de pièces supérieur à 8
ou 3 solutions correctes

1 Les solutions proposées ont toutes 8 pièces, mais comportent des erreurs de calcul, avec un total différent de 1 €,
ou une ou deux solutions correctes

0 Incompréhension du problème

Niveau: 3

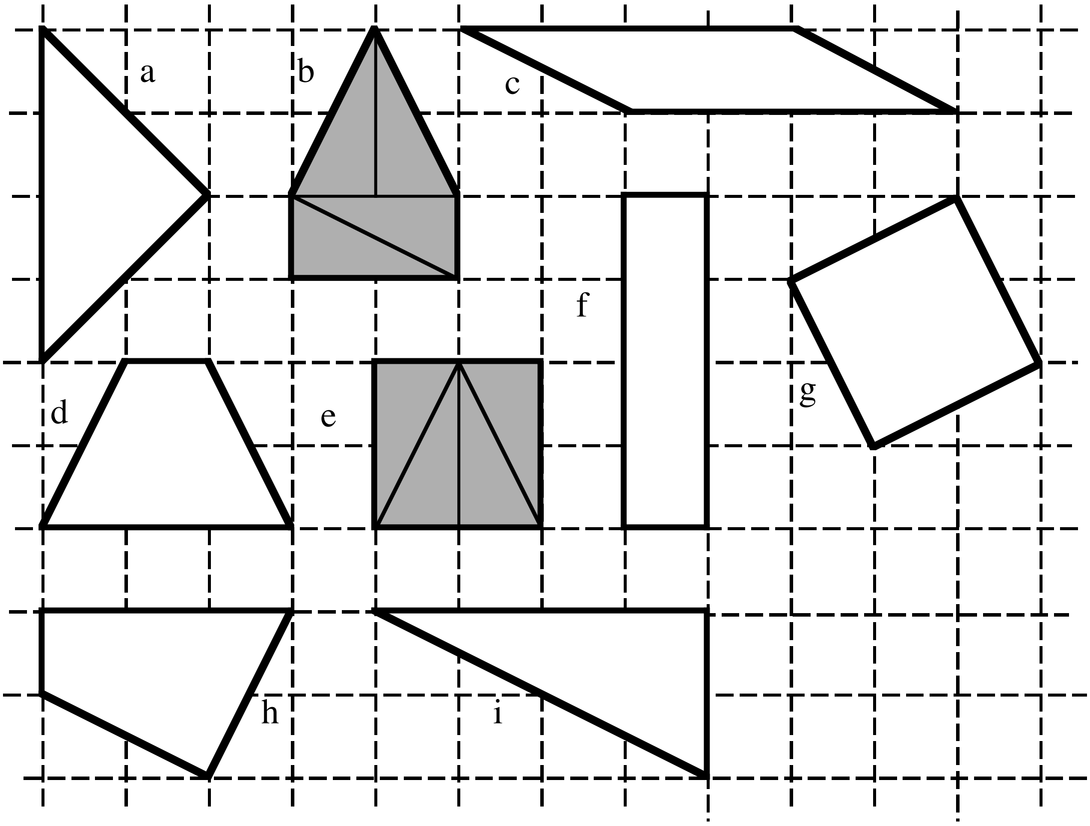
Origine : Suisse romande

2. PUZZLE DE QUATRE TRIANGLES (I) (Cat 3)

Rosalie a de nombreux triangles de carton gris, tous égaux (de même forme et de même grandeur).

Elle essaie de recouvrir entièrement chacune des figures dessinées ci-dessous, en utilisant à chaque fois 4 de ses triangles égaux.

Elle a déjà réussi à recouvrir la « maison » (b) et le carré (e) qui sont en gris et sur lesquels on voit bien les quatre triangles.



Rosalie pourra-t-elle recouvrir chacune des autres figures en utilisant toujours quatre triangles égaux ?

Pour chaque figure :

- **si c'est possible, dessinez de façon précise les quatre triangles ;**
- **si c'est impossible, dites pourquoi ça ne va pas.**

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : décomposition et recomposition de surfaces par des triangles, comparaison de longueurs et d'angles, pavage

Analyse de la tâche

- Se familiariser avec les propriétés du triangle utilisé : triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et 2 (en côtés de carrés du quadrillage), dont l'hypoténuse est un peu plus grande que 2 ($\sqrt{5}$) et dont l'aire est égale à 1 carré unité).
- Chercher à dessiner les côtés des quatre triangles directement sur les figures.

Ou : découper quatre triangles, les placer sur les figures, puis dessiner leur disposition après les avoir retirés.

Ou : découper un grand nombre de triangles, les placer sur les figures et les y coller.

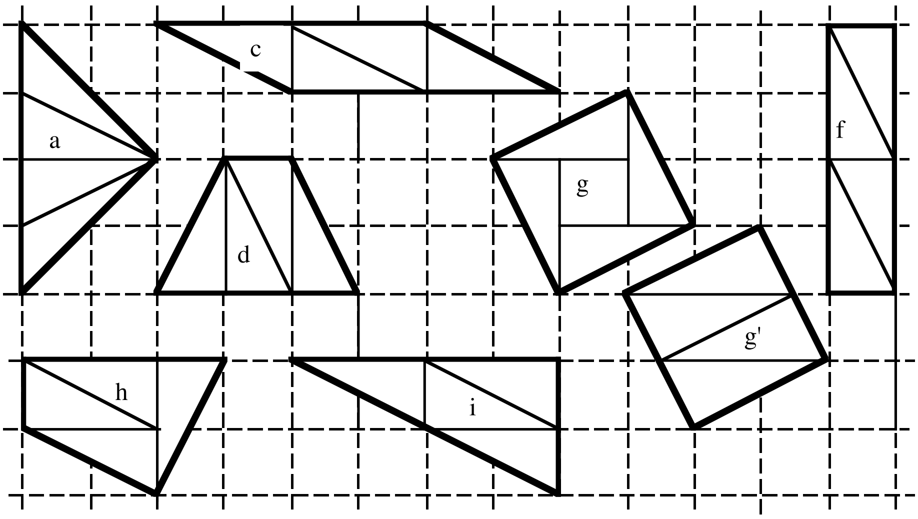
Selon la figure, le pavage est plus ou moins évident. On peut voir des rectangles formés de deux triangles, comme dans l'exemple du carré, on peut prolonger le quadrillage sur les figures, ...

Les cinq figures c, d, f, h, i sont pavables avec les quatre triangles proposés, en plus de b et e.

Pour la figure a, les angles ne permettent pas le pavage. On peut par exemple placer deux triangles, comme sur le dessin ci-dessous, mais les deux triangles qui restent « n'ont plus la même forme » (ne sont plus rectangles).

Pour la figure g, ce sont les dimensions qui empêchent le pavage. Son aire est 5 (en carrés du quadrillage) et les quatre triangles placés laissent un carré central vide. Les quatre triangles de la figure g' « ne sont pas de la même grandeur » que les autres triangles.

- Dire pourquoi ça ne marche pas dans ces deux cas ; par exemple que les triangles n'auraient pas la même forme (cas a) ou que la figure est plus grande que les autres (cas g).



Attribution des points

4 Pavages corrects des 5 figures c, d, f, h, i et un argument pour l'impossibilité de a et g

3 Les 5 figures correctes seulement, sans argumentation pour l'impossibilité des deux autres
ou, réponse argumentée mais comportant une seule erreur : une des figures « pavable » n'a pas été pavée ou une des figures « non pavable » a été pavée sans se rendre compte de l'impossibilité

2 Réponse non argumentée et comportant une seule erreur
ou réponse argumentée comportant deux ou trois erreurs

1 Réponse non argumentée et comportant deux ou trois erreurs
ou réponse argumentée comportant quatre erreurs

0 Plus de quatre erreurs ou incompréhension du problème

Niveau: 3

Origine: C.I.

3. BICYCLETTES ET TRICYCLES (Cat. 3, 4)

Un jour de vacances, Laurent va trouver son ami Georges qui loue des bicyclettes pour adultes et des tricycles pour enfants.

Laurent regarde les bicyclettes et les tricycles et compte 17 roues.

Combien de bicyclettes et combien de tricycles y a-t-il ?

Faites la liste des solutions possibles et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique : addition et multiplication de nombres naturels, nombres pairs et impairs

Analyse de la tâche

- S'approprier les conditions, imaginer des groupements de véhicules ou passer directement aux écritures numériques
- Comprendre éventuellement que pour obtenir 17 roues, le nombre de tricycles est impair.
- Comprendre qu'il y a plusieurs solutions qui sont des sommes résultant d'additions des nombres 2 et 3 ou des groupements de 17 roues par 2 ou 3.
- Dessiner les dix-sept roues en les groupant par deux ou par trois et ainsi mettre en évidence les trois solutions.
- Comprendre que six roues représentent soit 3 bicyclettes soit 2 tricycles.
- Effectuer par exemple les calculs suivants

nb. tricycles : 1	nb.roues tricycles : 3	nb. roues pour bicyclettes : 17 – 3 = 14	nb bicyclettes 14 : 2 = 7
nb. tricycles : 3	nb.roues tricycles : 9	nb. roues pour bicyclettes : 17 – 9 = 8	nb bicyclettes 8 : 2 = 4
nb. tricycles : 5	nb.roues tricycles : 15	nb. roues pour bicyclettes : 17 – 15 = 2	nb bicyclettes 2 : 2 = 1

Comprendre qu'il n'y a pas d'autres solutions car, à partir de 6 tricycles le nombre de roues est supérieur à 17.

Ou : établir un inventaire comme, par exemple, celui figurant ci-dessous :

nb. tot. roues	17	17	17	17	17	17
nb. tricycles	**1**	2	**3**	4	**5**	6
nb. roues tricyc.	3	6	9	12	15	18
nb. roues bicyc.	14	11	8	5	2	imp.
nb. bicyclettes	**7**	imp.	**4**	imp.	**1**	imp.

Ou : procéder par essais au hasard, conduisant à une ou plusieurs solutions sans se rendre compte qu'il pourrait y en avoir d'autres.

Attribution des points

4 Les 3 solutions correctes (1 tr. et 7 bic. / 3 tr. et 4 bic. / 5 tr. et 1 bic.) expliquées ou dessinées clairement

3 Les 3 solutions correctes sans justification
ou les solutions correctes expliquées ou dessinées clairement mais accompagnées d'une solution erronée

2 Deux solutions correctes expliquées ou dessinées clairement

1 Deux solutions correctes sans justification
ou une solution correcte expliquée ou dessinée clairement
ou une ou deux solutions correctes accompagnée(s) d'une solution erronée

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3, 4

Origine: Rozzano

4. LA MAISON D'ÉLISE (Cat. 3, 4)

Cinq amies, Alice, Blanche, Charlotte, Danièle et Élise habitent la même rue.

Leurs maisons se trouvent les unes à côté des autres, toutes du même côté de la rue.

Sur ce côté de la rue, les maisons portent toutes des numéros impairs : la première maison porte le numéro 1, la deuxième le numéro 3, la troisième le numéro 5 et ainsi de suite.

- Blanche habite au numéro 17.
- Charlotte habite la maison qui porte le numéro le plus grand.
- Charlotte n'habite pas à côté de chez Alice ni à côté de chez Danièle.
- Alice habite au numéro 21.

Quel est le numéro de la maison d'Élise ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique : sériation et correspondance dans une succession de nombres impairs
- Logique : prise en compte simultanée de plusieurs conditions (conjonction)

Analyse de la tâche

- Se référer aux pratiques courantes de la numérotation des maisons d'une rue et admettre que, dans le cas présent, il n'y a pas de numéros manquants ni de numéros doubles du type 21A ou 21B.
- Déduire de la deuxième condition que la maison de Charlotte se trouve à l'une des deux extrémités de la file des 5 maisons, selon le sens choisi.
- Déduire de la troisième condition que Blanche ou Élise habitent à côté de chez Charlotte.
- Déduire de la première et de la quatrième condition que c'est Elise qui habite à côté de chez Charlotte.
- Placer chaque enfant au bon numéro : (Blanche; 17) ; (Danièle; 19) ; (Alice; 21) ; (Élise ; 23) ; (Charlotte; 25).

Ou : dessiner cinq maisons et placer le numéro 17, le 19 et le 21. Charlotte ne peut pas être au 19, ni au 23, ni au 15. En déduire qu'elle est au 25 et que la première maison est le numéro 17. Nous savons maintenant que Blanche habite au 17, que Alice habite au 21 et que Charlotte habite au 25. Comme Danièle n'habite pas à côté de chez Charlotte, elle habite donc au 19. Par conséquent, c'est Élise qui habite au 23.

Ou : procéder par essais successifs en éliminant les essais menant à des impossibilités.

Attribution des points

4 Réponse correcte (n° 23) avec explication permettant de suivre le raisonnement adopté

3 Réponse correcte avec des explications confuses ou la recopie des conditions (qui n'est pas une vraie explication)

2 Réponse correcte sans explication
ou une erreur due au non-respect d'une des conditions

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveau: 3, 4

Origine: Siena et rencontre de Parme

5. LE CLASSEMENT (Cat. 3, 4, 5)

Cinq amis, Jacques, Romain, Georges, Tony, et Valéry ont fait une course.

Voici quelques informations sur le classement de cette course :

- Jacques est arrivé avant Georges.
- Georges était entre Romain et Valéry à l'arrivée, il n'y avait personne d'autre entre eux.
- Romain n'est pas dans les trois premiers.
- Jacques et Valéry sont arrivés après Tony.

Reconstituez le classement de ces cinq coureurs, du premier au dernier.

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique et raisonnement : relations temporelles

Analyse de la tâche

- Lire les quatre informations et les comparer pour choisir celle qui sera prise en compte en priorité, en général celle qui donne le plus de précision. Par exemple : R est 4e ou 5e d'après 3) ; G n'est pas premier d'après 1), ...
- Prendre en compte deux informations simultanément puis trois et les quatre par une démarche d'hypothèses et de vérifications.

  Par exemple, d'après 1) et 4) imaginer un classement partiel en première hypothèse : T, J, G, V et y insérer R comme deuxième hypothèse d'après 3) : T, J, G, R, V et vérifier s'il vérifie 2). Comme ce n'est pas le cas, placer R en dernier : T, J, G, V, R. L'information 2) n'étant pas vérifiée, il faut remonter à la première hypothèse et la modifier : T, J, V, G. puis placer R selon 3) : T, J, V, R, G et constater que 2) n'est toujours pas vérifiée et mettre R en dernier comme deuxième hypothèse : T, J, V, G, R.

Ou : procéder par essais, en utilisant une représentation spatiale (sur un axe, ou des noms sur des papiers mobiles,...)

Attribution des points

4 Réponse correcte (du premier au dernier : T, J, V, G, R) avec explication permettant de suivre le raisonnement adopté

3 Réponse correcte avec des explications confuses ou une simple copie des conditions comme justification

2 Réponse correcte sans explication (ou qui semble trouvée au hasard)
ou réponse erronée due au non respect d'une seule des conditions
ou réponse en donnant le classement du dernier au premier

1 Début de raisonnement montrant la prise en compte de deux conditions au moins

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origines : anciens problèmes du RMT (et d'autres concours), adaptés par C.I.

6. CHIFFRES ROUGES ET CHIFFRES NOIRS (Cat. 4, 5)

Julien a écrit chacun des nombres de 0 à 99 sur des billets en utilisant un stylo noir pour les chiffres « 1 », « 3 », « 5 », « 7 » et « 9 » et un stylo rouge pour les chiffres « 0 », « 2 », « 4 », « 6 » et « 8 ».

Il répartit les billets dans quatre boîtes sur lesquelles il écrit N, R, NR et RN :

- dans la boîte N, il met les nombres qui sont écrits entièrement en noir, comme 37 ou 7
- dans la boîte R, il met les nombres qui sont écrits entièrement en rouge, comme 6 ou 24
- dans la boîte NR, il met les nombres dont le chiffre des dizaines est noir et le chiffre des unités est rouge, comme 58
- et dans la boîte RN, il met les nombres qui restent, comme 85.

Dans quelle boîte y aura-t-il le plus de nombres ?

Dans quelle boîte y aura-t-il le moins de nombres ?

Expliquez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération, distinction chiffre-nombre, nombres pairs et impairs

Analyse de la tâche

- Constater ou se rappeler que les nombres de 0 à 99, sont composés d'un ou deux chiffres, qu'il faut ici observer selon le critère « noir » ou «rouge » (impair ou pair si on considère ces chiffres comme des nombres naturels d'un seul chiffre).
- Se rappeler qu'il y a 100 nombres de 0 à 99, en vue des vérifications ou pour une première estimation. Imaginer que, en cas de répartition équitable, chaque boîte contiendrait 25 billets.
- Analyser plus en détail l'écriture des nombres composés de chiffres noirs et constater qu'il y en a 5 d'un seul chiffre (1, 3, 5, 7, 9) puis pour les nombres de deux chiffres trouver les 25 (5 x 5) possibilités en combinant les chiffres des dizaines et ceux des unités. Conclure qu'il y aura 30 nombres (25 + 5) dans la boîte N.
- Le cas des chiffres « rouges» est différent du précédent. Il y a bien 5 nombres d'un seul chiffre rouge sur le (0, 2, 4, 6, 8) mais il n'y en a que 20 (4 x 5) de deux chiffres rouges en combinant les quatre possibilités restantes pour les chiffres des dizaines (2, 4, 6, 8) et les cinq possibilités pour les chiffres des unités. On arrive ainsi à 25 (5 + 20) nombres qui s'écrivent avec des chiffres rouges seulement. Il y aura 25 nombres dans la boîte R.
- Les nombres bicolores sont de deux chiffres. Il y a cinq possibilités de commencer par un chiffre noir : chiffre des dizaines 1, 3, 5, 7, 9 combinés avec les cinq cas d'un deuxième chiffre rouge, des unités, 0, 2, 4, 6, 8, ce qui conduit à 25 nombres dans NR .
- Pour les autres nombres bicolores, il n'y aura que 20 combinaisons des quatre chiffres rouges des dizaines 2, 4, 6, 8 avec les cinq chiffres noirs des unités, 1,3,5,7,9. Il y aura 20 nombres dans RN.

Ou, écrire les cent nombres en utilisant les deux couleurs et procéder par comptage un à un des nombres de chaque catégorie.

- Formuler la réponse : La boîte N en aura le plus : 30 et la boîte RN en aura le moins : 20. Puis rédiger les « explications » pouvant aller de dispositions ordonnées où les combinaisons sont bien visibles à un simple inventaire des nombres de chacque type, écrits en couleur. Valider éventuellement les réponses en calculant les nombres de R et de NR et vérifier que la somme des nombres répartis est 100

Attribution des points

4 Réponses correctes et complètes (N le plus, 30 et RN le moins, 20) avec explications (par exemple la liste des nombres de chaque boîte, le type de comptage effectué, …)

3 Réponses correctes et complètes (N le plus, 30 et RN le moins, 20) avec une justification partielle
ou démarche correcte mais réponse erronée du fait d'une erreur de comptage

2 Réponses correctes et complètes, sans aucune explication
ou une seule des deux réponses avec explications

1 Une seule réponse correcte, sans explication

0 Incompréhension du problème

Degrés : 4, 5

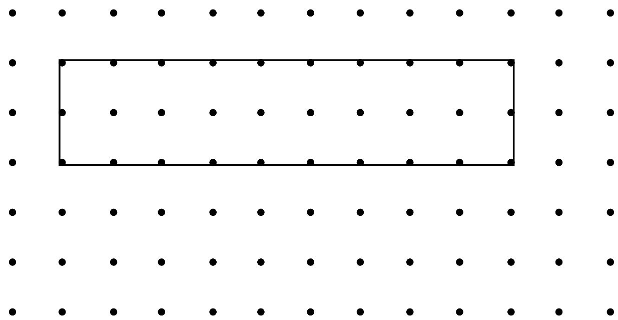
Origine : d'après le Rallye mathématique romand 1993 (Epreuve II)

7. LA BOUCLE (Cat. 4, 5)

Archibald a tendu une boucle de ficelle sur une planche à clous rectangulaire.

Il constate que sa boucle :

- forme un rectangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la planche,
- touche 22 clous,
- entoure 18 carrés entiers.



Dessinez une boucle qui, comme la précédente :

- forme un rectangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la planche

- touche toujours 22 clous

- mais entoure le plus grand nombre possible de carrés entiers.

Etes-vous sûrs d'avoir trouvé le rectangle qui contient le plus grand nombre de carrés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication
- Géométrie : rectangle, approche des notions de périmètre et aire

Analyse de la tâche

- Vérifier les données de l'énoncé : 22 clous et 18 carrés
- Penser que le rectangle pourrait être plus long ou plus large et se rendre compte que si l'on augmente la longueur, la largeur diminue et réciproquement si on diminue la longueur la largeur augmente tout en touchant le même nombre de clous (le périmètre est conservé).
- Constater que le nombre de carrés intérieurs varie selon les rectangles et noter les résultats, en surmontant les difficultés à exprimer des longueurs de côtés

longueur *:	10	9	8	7	6	5	...
largeur*:	1	2	3	4	5	6	...
clous touchés (périmètre*)	22	22	22	22	22	22	...
carrés entourés (aire)	10	18	24	28	30	30	...

- Expliquer que le nombre de carrés varie, selon les calculs ou essais, qu'on peut en entourer 24, puis 28, puis 30 et dessiner le rectangle de 5 sur 6 comme solution. Vu que les dimensions sont des nombres entiers le nombre d'essais est limité et permet de s'assurer que la solution trouvée est optimale.

Attribution des points

4 Dessin d'un rectangle 5 x 6 avec justification du plus grand rectangle (liste des rectangles dont le périmètre est 22, le rectangle qui a la plus grande aire est celui qui se rapproche le plus du carré, …).

3 Dessin correct sans explications pertinentes ou avec réponse seule « oui »

2 Dessin d'un rectangle 7 x 4

1 Début de recherche cohérente ou non respect d'une des contraintes

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine : C.I.

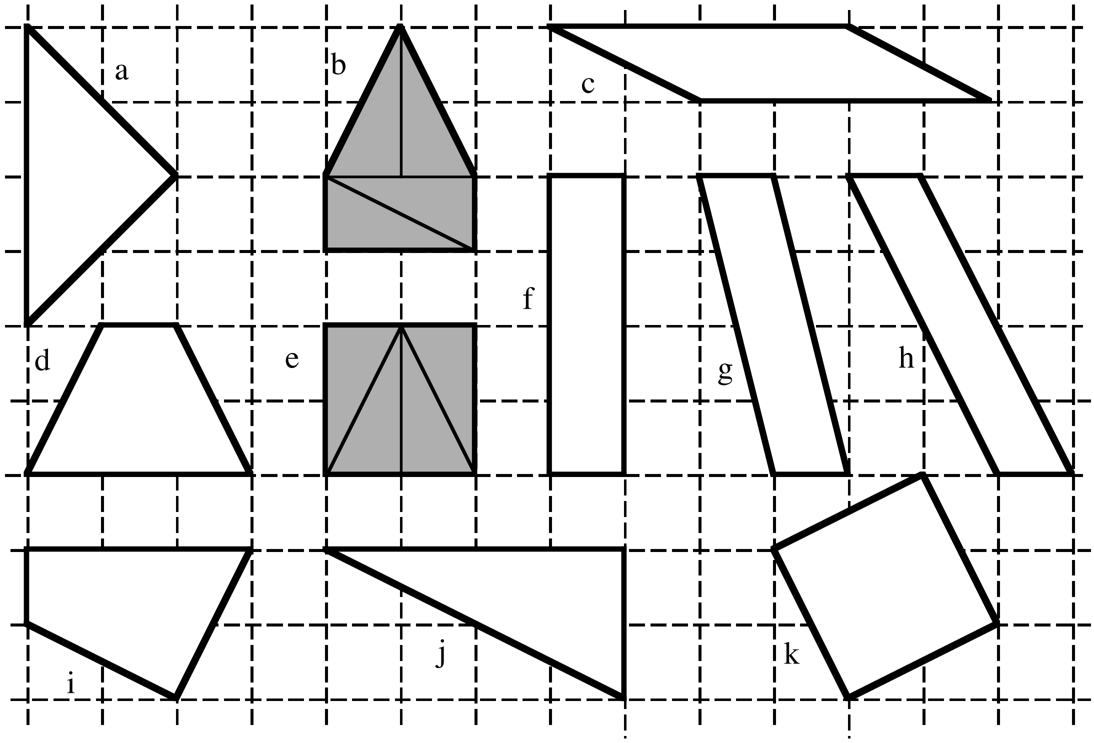
* Les enfants n'utiliseront pas forcément les termes « longueur » et « largeur » et peuvent se référer au « nombres de clous ». Par exemple, ils peuvent considérer le rectangle dont l'aire est 30 comme « 6 sur 5 » ou comme celui qui a « 7 clous et 6 clous » dans la longueur et la largeur. Des clous au périmètre considéré comme une grandeur continue (une longueur), il y a encore toute une construction à élaborer, mais ici, le dessin de la ficelle lève les ambiguïtés.

8. PUZZLE DE QUATRE TRIANGLES (II) (Cat. 4, 5, 6)

Rosalie a de nombreux triangles de carton gris, tous égaux (de même forme et de même grandeur).

Elle essaie de recouvrir entièrement chacune des figures dessinées ci-dessous, en utilisant à chaque fois 4 de ses triangles égaux.

Elle a déjà réussi à recouvrir la « maison » (b) et le carré (e) qui sont en gris et sur lesquels on voit bien les quatre triangles.



Rosalie pourra-t-elle recouvrir chacune des autres figures en utilisant toujours quatre triangles égaux ?

Pour chaque figure :

- **si c'est possible, dessinez de façon précise les quatre triangles ;**
- **si c'est impossible, dites pourquoi ça ne va pas.**

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : décomposition et recomposition de surfaces en triangles, comparaison de longueurs et d'angles, pavage

Analyse de la tâche

- Se familiariser avec les propriétés du triangle utilisé : triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et 2 (en côtés de carrés du quadrillage), dont l'hypoténuse est un peu plus grande que 2 ($\sqrt{5}$) et dont l'aire est égale à 1 (carré unité).
- Chercher à dessiner les côtés des quatre triangles directement sur les figures.

Ou : découper quatre triangles, les placer sur les figures, puis dessiner leur disposition après les avoir retirés.

Ou : découper un grand nombre de triangles, les placer sur les figures et les y coller.

Selon la figure, le pavage est plus ou moins évident. On peut voir des rectangles formés de deux triangles, comme dans l'exemple du carré, on peut prolonger le quadrillage sur les figures, ...

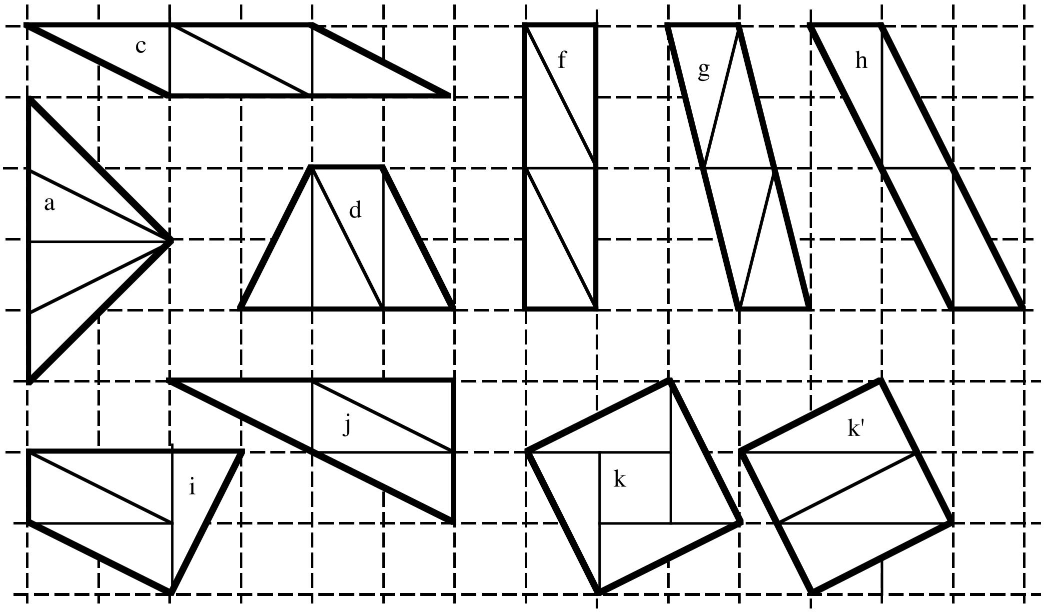
Les figures c, d, f, h, i, j sont pavables avec les quatre triangles proposés.

Pour la figure a, les angles ne permettent pas le pavage. On peut par exemple placer deux triangles, comme sur le dessin ci-dessous, mais les deux triangles qui restent ne sont plus rectangles ou « n'ont plus la même forme ».

Le pavage est aussi impossible pour la figure g, pour des raisons d'angles (les triangles sont isocèles, mais plus rectangles)

Pour la figure k, ce sont les dimensions qui empêchent le pavage. Son aire est 5 (en carrés du quadrillage) et les quatre triangles placés (voir figure k ci-dessous), laissent un carré central vide. Si l'on découpe la figure en 4 triangles rectangles égaux (comme dans la figure k'), il faut observer que ces triangles sont plus grands que les originaux (le côté le plus long ne correspond pas à deux segments unités, mais à la diagonale d'un rectangle 1 x 2 qui mesure 2,2 environ (√5); cette observation est assez évidente si on mesure avec une règle.)

- Justifier les trois cas où le pavage est impossible, en disant par exemple que les triangles n'auraient pas la même forme (cas a et g) ou que la figure est plus grande que les autres (cas k).



Attribution des points

4 Pavages corrects des 6 figures c, d, f, h, i, j et un argument pour l'impossibilité de chacune des 3 figures a, g et k.

3 Les 6 figures correctes et les 3 non pavées, mais sans argumentation

ou, réponse argumentée mais comportant une seule erreur : une des figures « pavable » n'a pas été pavée ou une des figures « non pavable » a été pavée sans se rendre compte de l'impossibilité

2 Une erreur, sans argumentation

ou réponse argumentée comportant deux erreurs

1 Réponse non argumentée comportant deux erreurs

ou : réponse argumentée comportant trois ou quatre erreurs

0 Plus de cinq erreurs ou incompréhension du problème

Niveaux: 4, 5, 6

Origine: C.I.

9. PANNEAUX ROUTIERS (Cat. 5, 6)

Guillaume roule sur l'autoroute A1 de Transalpie qui va de Sudoku, au sud du pays, à Nordicus au nord du pays, en passant par la capitale, Transville.

Il vient de quitter Sudoku et passe devant un panneau qui indique :

Transville 90 km
Nordicus 270 km

Guillaume se dit alors : *Tiens, une des distances est le tiers de l'autre !*

Un peu plus tard, avant d'arriver à Transville, Guillaume voit un nouveau panneau qui indique :

Transville 25 km.

À quelle distance de Nordicus se trouve-t-il alors?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

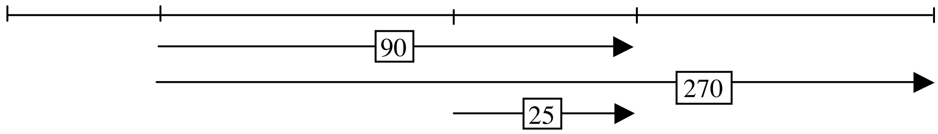
- Arithmétique : addition, soustraction
- Géométrie : relations spatiales

Analyse de la tâche

- Se représenter les positions des trois villes et celles des panneaux, par un schéma ou mentalement.
- Constater que la réflexion sur « le tiers » n'entre pas dans la résolution du problème.
- Choisir les opérations à effectuer entre les nombres 90, 270 et 25 en fonction de la représentation adoptée.

Par exemple, sur un axe (orienté ou non) :

Sudoku panneau 1 panneau 2 Transville Nordicus
(T : 90, N : 270) *(T : 25)*



du panneau 1 au panneau 2, effectuer la soustraction 90 – 25 = ... ou une addition lacunaire : ... + 25 = 90 pour obtenir 65 (km)

de 2 à N : effectuer la soustraction 270 – 65 = ... ou une addition lacunaire : ... + 65 = 270 pour obtenir 205 (km).

Autre exemple, mentalement :

calculer d'après les informations du panneau 1 que N est à 180 km de T par la soustraction 270 – 90 ou par l'addition lacunaire 90 + ... = 270, puis, par addition 25 + 180, trouver la distance du panneau 2 à N.

Attribution des points

4 Réponse correcte (205 km) avec une explication complète permettant de suivre le raisonnement adopté: schéma ou récit avec le détail des opérations

3 Réponse correcte (205 km) avec explications lacunaires ou confuses
ou une erreur de calcul qui se répercute sur tout le reste du problème avec une démarche correcte complète permettant de suivre le raisonnement adopté.

2 Réponse correcte (205 km) sans explication

1 Une distance calculée

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Problème donné aux étudiants d'un institut romand de formation des maîtres, transformé par C.I.

10. GARÇON, L'ADDITION ! (Cat. 5, 6)

Dans un restaurant, Luc, Marie, Nathalie, Olivier et Patricia, demandent l'addition après avoir bien mangé. Les cinq amis doivent payer un total de 128 euros. Ils décident de partager ce montant en parts égales, mais pour ne pas faire attendre le serveur, chacun met 25 euros sur la table. Luc ajoute 1 euro et Olivier ajoute 2 euros.

Ils sortent du restaurant. Avant de se quitter, ils cherchent une manière d'équilibrer les comptes pour que tous aient payé la même somme.

- Marie propose : «Je donne 1 euro à Luc. Nathalie et Patricia donnent chacune 1 euro à Olivier.»
- Nathalie propose : «Je donne 60 centimes à Luc. Marie et Patricia donnent chacune 60 centimes à Olivier.»
- Patricia affirme que la distribution ne serait pas correcte ni dans un cas, ni dans l'autre.

Qui a raison ? Comment peuvent-ils faire pour se partager correctement le montant ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: addition, soustraction, division

Analyse de la tâche

- Comprendre que les 3 euros versés en plus par Luc et Olivier auraient dû être divisés en cinq : 3/5 = 0,60 (ou calculer 128 /5 = 25,60) et que par conséquent, Marie, Nathalie et Patricia doivent encore verser chacune 60 centimes.
- En suivant la proposition de Marie, Luc et Olivier auraient payé 25 euros chacun, alors que Marie, Patricia et Nathalie auraient payé 26 euros chacune, ce qui n'est pas équitable.
- En suivant la propositon de Nathalie, Luc n'aurait payé que 25,40 euro et Olivier 25,80 euro. par conséquent, Luc devrait encore donner 20 centimes à Olivier. La proposition de Nathalie n'est pas équitable non plus.
- Par conséquent, c'est Patricia qui a raison.
- Trouver alors comment se répartir le solde du montant :

  Vu que les trois filles doivent donner 60 centimes chacune, l'une d'entre elles (Marie, Nathalie ou Patricia) pourrait donner 40 centimes à Luc et 20 centimes à Olivier et les deux autres donner 60 centimes à Olivier. On peut aussi imaginer rassembler les 60 centimes que Marie, Nathalie et Patricia doivent payer en un total de 1,80 euro. Puis, donner 40 centimes de ce montant à Luc et 1,40 euro de ce montant à Olivier.

Attribution des points

4 Réponses correctes (Patricia a raison. Marie, Nathalie et Patricia doivent donner 60 centimes chacune. Luc recevra 40 centimes et Olivier recevra 1,40 euro) avec les explications permettant de suivre le raisonnement adopté et de dire que les propositions de Nathalie et Marie sont inéquitables

3 Réponses correctes, avec une justification confuse ou partielle (calculs seuls par exemple)

2 Réponses correctes sans explication ou avec seulement des calculs incomplets
ou raisonnement correct mais qui contient une erreur de calcul.

1 Réponse « Patricia a raison », seule, sans aucune explication
ou début de raisonnement correct

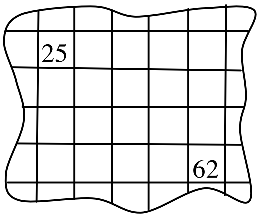
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine: Parma

11. FOUILLES ARCHÉOLOGIQUES (Cat. 5, 6, 7)

Dans la tombe d'un ancien empereur de Transalpie, des archéologues ont retrouvé une partie d'une tablette sur laquelle tous les nombres sont illisibles sauf 25 et 62.



Les archéologues savent que, à cette époque, les tablettes de nombres étaient construites selon des règles bien précises :

- une tablette complète était un quadrillage carré (même nombre de lignes que de colonnes)
- on y écrivait la suite des nombres entiers 1, 2, 3, ... en commençant par 1 dans la première case en haut à gauche,
- les nombres se suivaient de gauche à droite et, lorsqu'une ligne était complète, on continuait dans la ligne au-dessous, toujours de gauche à droite,
- il y avait un nombre dans chaque case et, évidemment, le plus grand nombre se trouvait dans la case en bas à droite.

Combien y avait-il de nombres dans cette tablette lorsqu'elle était complète?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: régularité dans la numération (bande numérique), opérations (multiplication et division euclidienne)
- Géométrie: disposition ordonnée sur une grille carrée

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que les tablettes qui répondent aux règles de construction ont un nombre de cases qui est un carré (4, 9, 16, ...) et que, par conséquent, y figurent les nombres de 1 à 4 dans la tablette « 2 » ou de 1 à 9 dans la tablette « 3 » ou de 1 à 16 dans la tablette « 4 », …
- Construire éventuellement une ou deux tablettes complètes pour se faire une représentation de ces objets anciens. (Constater que la tablette dessinée n'est certainement pas la tablette « 10 » des nombres de 1 à 100 (10 x 10) car le 29 (quatre cases après 25 devrait être dans la colonne du 69 et non du 62.)
- Observer que, d'après le fragment donné où apparaissent le 62 et des cases de la ligne suivante, la tablette n'est pas celle de « 8 » (64) ni d'un des carrés inférieurs, mais au moins celle de « 9 » (81) ou d'un carré supérieur.
- Déduire des règles de construction que la différence entre deux nombres qui se suivent dans une même colonne est le « numéro » (nombre de lignes ou colonnes) de la tablette.
- Compléter les cases de la ligne du 25 jusqu'à 29 (dans la colonne de 62). Observer qu'il y a trois lignes entre ces deux nombres et calculer leur différence, 62 – 29 = 33, qui vaut trois fois le « numéro » de la tablette. En déduire qu'il s'agit de la tablette « 11 », qui contient les 121 nombres de 1 à 121.

Ou: chercher à situer la case 25 par rapport à la case 1 pour reconstituer la tablette. Par exemple, compléter les 4 cases qui précèdent le 62 dans sa ligne, (61, 60, 59, 58), voir que, de 58 il faut remonter de 33 (3 x 11) pour arriver à 25, (47, 36, 25) puis continuer par 14 et 3 pour arriver à la 3e case de la première ligne (on ne peut aller plus haut sans entrer dans les nombres négatifs). Avec ces données, compléter le tableau et s'apercevoir qu'il s'agit de la tablette « 11 » (d'autres « chemins » reconstitués, en diagonale, horizontalement ou verticalement permettent d'arriver aux mêmes conclusions).

Ou : construire les tablettes « 9 », « 10 » et « 11 » pour constater que cette dernière convient, sans toutefois se rendre compte que c'est la seule.

Attribution des points

4 Solution correcte (121) avec explication de la procédure où figure explicitement la référence à la différence 33 ou aux multiples de 11 ; ou d'un autre procédure de reconstitution du tableau, par lignes, colonnes ou diagonales (dans lesquelles le nombre 11 est aussi explicitement cité).

3 Solution correcte (121) avec explication peu claire ou une simple référence à des essais

2 Solution correcte (121) sans explication
ou réponse comportant une seule erreur de calcul mais avec démarche correcte
1 Début de raisonnement montrant que plusieurs grilles ont été prises en considération
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine: Siena

12. LES CONFITURES (Cat 6, 7, 8)

C'est la récolte des cerises. Grand-mère prépare des confitures dans son énorme chaudron, pour sa famille et ses voisins.

Lundi, elle cuit 8 kg de cerises avec 5 kg de sucre.

Mardi, elle cuit 10 kg de cerises avec 7 kg de sucre.

Jeudi, jour de la plus grande récolte, elle cuit 16 kg de cerises avec 10 kg de sucre.

Samedi, fin de la récolte, elle cuit 5 kg de cerises avec 3 kg de sucre.

Quel est le jour où elle a fait la confiture qui a le goût le plus sucré ?

Y a-t-il des jours où les confitures ont le « même goût » en sucre ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : proportionnalité « intuitive »

Analyse de la tâche

- Identifier les deux grandeurs en jeu dans le problème, les quantités de sucre et celles de fruits.
- Se rendre compte qu'il faut tenir compte simultanément des deux grandeurs et ne pas se baser sur le sucre seulement, en pensant par exemple que la plus sucrée est celle du jeudi car c'est ce jour-là que la quantité de sucre est la plus grande.
- Éviter de raisonner sur les écarts entre quantités de sucre et de fruits. Par exemple, l'écart entre les masses de sucre et de confiture est 3 kg pour le lundi comme pour le mardi et en déduire que les deux confitures ont la même teneur en sucre, sans envisager des cas comme 4 et 1 ou 3 et 0, où l'écart est toujours le même mais la confiture de moins en moins sucrée. Éviter de même de raisonner sur les écarts entre quantités de même nature d'un jour à un autre.
- S'intéresser aux rapports des masses en doublant, triplant, divisant par deux, ... , chacune des quantités. Exemple : si je fais deux chaudrons de 8kg de fruits et 5 kg de sucre, la teneur en sucre doit être la même que si on cuit ensemble 16 kg de fruits et 10 kg de sucre et en déduire que la teneur en sucre est la même lundi et jeudi.
- Constater qu'en doublant les quantités de samedi, on obtient 10 kg de fruits et 6 kg de sucre, ce qui permet de dire que la confiture du samedi est moins sucrée que celle de mardi : 10 kg de fruits et 7 kg de sucre.
- Poursuivre dans les rapports de masse pour comparer, par exemple, les confitures de samedi et jeudi, en faisant coïncider l'une des quantités. En triplant celle de jeudi on trouve 48 kg de fruits pour 30 kg de sucre, en prenant dix fois celle de samedi, on trouve 50 kg de fruits pour 30 kg de sucre, ce qui permet de dire que celle de samedi est moins sucrée.
- Exprimer les réponses : la plus sucrée le mardi, la même teneur en sucre le lundi et le jeudi. (Celle de samedi étant la moins sucrée).

Ou : mettre en oeuvre une procédure « experte » (pour les élèves qui maîtrisent la proportionnalité) en calculant, par exemple, le rapport pour chaque jour, masse du sucre/masse totale. On obtient ainsi, en nombres décimaux affichés sur une calculatrice : mardi : $7/17 \approx 0{,}41$ > lundi et jeudi $5/13 = 10/26 \approx 0{,}38$ > samedi : $3/8 \approx 0{,}375$.

Ou : calculer les rapports journaliers entre sucre et confiture et trouver ainsi la confiture la plus sucrée avec d'autres types de rapport que les précédents, mais permettant aussi la comparaison :

	lundi	mardi	jeudi	samedi
sucre (en kg)	5	7	10	3
cerises (en kg)	8	10	16	5
rapport	*5/8 = 0,625*	**7/10 = 0,7**	*10/16 = 0,625*	3/5 = 0,6

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (mardi la plus sucrée, lundi et jeudi même teneur en sucre) avec explications claires sur la base de rapports

3 Réponse correcte et complète avec explications peu claires

2 Une des deux réponses correctes, avec explications
ou les deux réponses correctes sans explications

1 Une des deux réponses correctes, sans explications

0 Procédures de comparaison des écarts ou incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine: Groupe «proportionnalité»

13. ZÉRO PERDANT (Cat 6, 7, 8)

Un commerçant a vendu un article dont le prix en euros est un nombre entier de trois chiffres comportant un « 0 ».

En établissant la facture, il commet une erreur et ne frappe que les deux chiffres différents de « 0 », dans le bon ordre cependant. Il envoie donc cette facture avec un prix qui est un nombre de deux chiffres.

Lorsque le client paie la facture, le commerçant s'aperçoit de son erreur et se dit : *Mauvaise affaire, j'ai perdu 441 euros en oubliant ce maudit « 0 ».*

Quel était le prix de l'objet ?

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération, opérations

Analyse de la tâche

- Comprendre que le « 0 » du prix réel est soit le chiffre des dizaines, soit celui des unités.
- Se rendre compte que si le « 0 » est le chiffre des dizaines, la perte est un multiple de 10 (ou se termine par « 0 ») puisque (exemple 907 devient 97, perte 907 – 97 = 810) le chiffre des unités est le même dans le prix réel et le prix erroné. Comme la perte de l'énoncé, 441, n'est pas un multiple de 10, il faut abandonner ce cas.
- Analyser le cas où le « 0 » est le chiffre des unités par quelques exemples pour se donner un « ordre de grandeur de la perte en passant du nombre de trois chiffres à celui de deux chiffres : 630 devient 63, perte 630 – 63 = 567, 960 devient 96, perte 854, ... Comprendre ainsi que le nombre des centaines est déterminant pour s'approcher de la perte effective. 9 centaines donne une perte située de l'ordre de 8 à 9 centaines, 6 centaines donne une perte de l'ordre de 5 à 6 centaines. En déduire que le prix cherché a 5 ou 4 comme chiffre des centaines puisque la perte est de 441.
- Continuer par la recherche du chiffre des dizaines, par essais successifs organisés : 540 – 54 = 486, 550 – 55 = 495 (on s'éloigne), 530 – 53 = 477, ..., 510 – 51 = 459, **490 - 49 = 441**, 480 – 48 = 432, ... (on s'éloigne et on ne trouvera pas d'autre solution).

Ou : après avoir compris que le « 0 » est le chiffre des unités, poser une addition du genre: $ab + 441 = ab0$. Pour obtenir « 0 » b vaut 9 et l'addition précédente devient: $a9 + 441 = a90$, d'où $a = 4$, et le prix correct est 490, seule solution possible.

Ou : poser l'algorithme écrit de la soustraction pour les deux cas :

$$\begin{array}{cccc} & a & 0 & b \\ - & & a & b \\ \hline & 4 & 4 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & a & b & 0 \\ - & & a & b \\ \hline & 4 & 4 & 1 \end{array}$$

constater qu'il faut renoncer au premier cas ; examiner le second cas, reconstituer la soustraction : b = 9 et a = 4 (9 – 5 ou 8 – 4) pour arriver au nombre initial 490.

Ou, par un raisonnement plus généralisé, comprendre que n centaines devenant n dizaines, la perte est la différence entre $100 \times n$ et $10 \times n$, c'est-à-dire $90 \times n$ et que la transformation de m dizaines en m unités représente une perte de $10 \times m - 1 \times m = 9 \times m$. La perte totale est donc $90 \times n + 9 \times m = 441$. Le multiple de 90 qui précède 441 est 360 (**4** x 90) auquel on peut ajouter 81 = **9** x 9 pour arriver à 441. Le nombre cherché est donc composé de 4 centaines et 9 dizaines : 490. (En partant du multiple de 90 qui suit 441, 450 (**5** x 90), il faudrait retrancher **1** x 9 pour arriver à 441, le nombre cherché est alors composé de 5 centaines moins 1 dizaine, c'est-à-dire aussi 490.)

Attribution des points

4 Réponse correcte (490) avec une explication complète où apparaissent clairement 490, 49 et la différence 441

3 Réponse correcte (490) avec explications lacunaires ou confuses
ou réponse 490 trouvée « par essais » non organisés (« nous avons fait de nombreux essais et nous avons trouvé »)

2 Réponse correcte (490) sans aucune explication

1 Début de résolution cohérent

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Idée tirée de N. Rouche, *Du quotidien aux mathématiques* Ellipses 2006, mise en scène par C.I.

14. TOUJOURS 6 (I) (Cat. 6, 7, 8)

Toto s'apprête à effectuer la multiplication 7,5 x 0,8 sur sa calculatrice. Avant de presser la touche « = » il se dit :

Je vais voir apparaître un nombre de deux chiffres après la virgule car ma grand-mère m'a dit que si on multiplie deux nombres qui ont chacun un chiffre après la virgule, on obtient un nombre qui s'écrit avec deux chiffres après la virgule.

Toto presse alors la touche « = » et, surprise, c'est le nombre 6 qui apparaît !

Il vérifie avec d'autres calculatrices et chaque fois il trouve que 7,5 x 0,8 = 6.

Il se demande alors s'il y a d'autres couples de nombres que 7,5 et 0,8 qui ont aussi chacun un chiffre après la virgule, et dont le produit est 6.

Et vous, qu'en pensez-vous ? Combien y a-t-il de couples de nombres décimaux ayant chacun un chiffre après la virgule dont le produit est 6 ?

Écrivez tous ces couples et dites comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication des nombres décimaux, multiples et diviseurs, factorisation

Analyse de la tâche

- Vérifier que le produit de 7,5 et 0,8 est bien 6, sur une calculatrice et « à la main », pour se rendre compte que la règle de la grand-mère n'est pas vraie pour tous les produits car les deux chiffres après la virgule peuvent être des « 0 », qui ne s'écrivent pas.
- Comprendre d'abord que l'un des deux facteurs présente un 5 comme chiffre des dixièmes.
- Chercher d'autres couples de nombres décimaux d'un chiffre après la virgule dont le produit est 6, en sachant que l'un des facteurs est de la forme ...,5 (5 comme chiffre des dixièmes). Essayer par exemple toutes les divisions de 6 successivement par 0,5 ;1, 5 ; ... ; c'est à-dire 6 : 0,5 = 12 ; 6 : 1,5 = 4 ; 6 : 2,5 = 2, 4 ; 6 : 3,5 = 1,7428.... ; 6 : 4,5 = 1,333... ; 6 : 5,5 = 1,0909... ; 6 : 6,5 = 0.923... ; 6 : 7,5 = 0,8 ; 6 : 8,5 = ... et constater, en continuant bien au-delà de 6 : 8,5, qu'il n'y en a que deux qui conviennent et conduisent aux couples 2,4 ;2,5 et 7,5 ; 0,8 (déjà connu).

Ou : penser à 600, par exemple, à la place de 6,00 et décomposer 600 en facteurs premiers : 600 = 2 x 2 x 2 x 3 x 5 x 5. Parmi les couples de nombres dont le produit est 600, on ne doit prendre en compte que ceux dont les chiffres des unités sont différents de 0 pour obtenir, en revenant au produit 6, que ceux ayant un chiffre après la virgule différent de 0. C'est-à-dire qu'il faut éviter des nombres composés de facteurs 2 et 5 simultanément. Il n'y a donc que 2 x 2 x 2 = 8 et 2 x 2 x 2 x 3 = 24 d'une part, 3 x 5 x 5 = 75 et 5 x 5 = 25 d'autre part.

Ou : imaginer le problème dans un cadre géométrique comme la recherche de tous les rectangles de 6 dm^2 dont les mesures des côtés ont un nombre de 1 chiffre après la virgule, en dm, ou sont un nombre entier en cm -non multiple de 10. On est ainsi ramené à la recherche des couples de diviseurs de 600, dans l'ensemble des nombres naturels (1 ; 600), (2 ; 300), ... (**8 ; 75**), ... (20 ; 30), (**24 ; 25**) dont deux seuls conviennent.

Ou : se fonder sur les règles de multiplication des fractions et rechercher les couples tels que a/b x c/d = 600/100 en dressant l'inventaire des dénominateurs tels que b x d = 100 et qu'il ne faudra retenir que les fractions qui s'écrivent sous forme de nombres décimaux d'un chiffre exactement après la virgule.

Attribution des points

4 Réponse exacte : « 2 couples de nombres de 1 chiffre après la virgule : (2,4 ; 2,5) et (0,8 ; 7,5) (la citation de ce dernier n'est pas obligatoire puisqu'elle figure dans l'énoncé), avec explications ou descriptions des essais montrant que toutes les solutions sont là

3 Réponse exacte, avec explications incomplètes : doutes sur l'exhaustivité

2 Réponse exacte, sans explications

1 Début correct de recherche

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origines : C.I.

15. RUBAN ADHÉSIF (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le couvercle d'une boîte de carton a 24 cm de longueur, 18 cm de largeur et une hauteur de 2 cm. Jacques désire le renforcer avec des bandes de papier adhésif de 4 cm de largeur qu'il peut choisir parmi 10 modèles de bandes, notées de A à J. (voir figure 2)

Pour que son travail se présente bien, il ne veut pas que les bandes se superposent, mais qu'elles recouvrent entièrement une largeur de 2 cm de chaque côté des quatre arêtes supérieures. (Voir figure 1)

Trouvez toutes les manières possibles de recouvrir le couvercle avec quatre bandes (il peut y avoir deux bandes de même modèle).

Pour chaque ensemble trouvé de quatre bandes, indiquez une manière (une seule) de les placer sur le couvercle dans l'ordre (*1, 2, 3, 4*) indiqué sur la *figure 1*.

Par exemple : C, F, E, G (ou E, G, F, C), mais pas C, G, E, F (ou E, F, C, G) car on verrait les faces autocollantes de F et G !

Figure 1 : la boîte et son couvercle, avec, en gris, la partie à recouvrir par les quatre bandes 1, 2, 3, 4

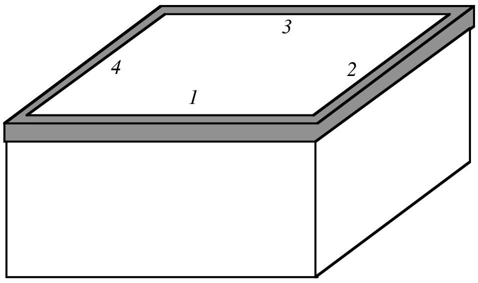
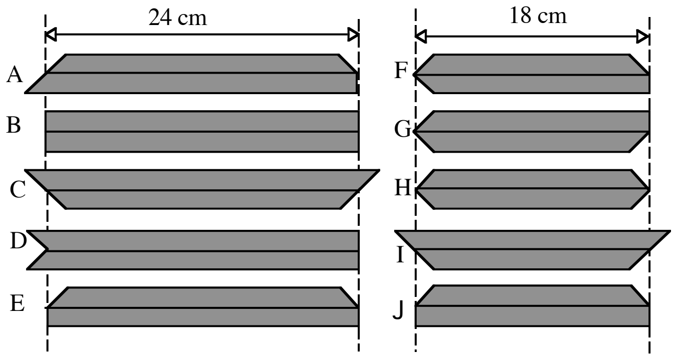


Figure 2 : les dix modèles de bandes à disposition, avec leur face visible en gris ; l'autre face, dessous, est autocollante



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : passage du plan à l'espace à trois dimensions, symétrie axiale
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Se représenter la disposition de chaque bande lorsqu'elle est collée sur deux faces du couvercle, de part et d'autre d'une arête supérieure.
- Remarquer que toutes les bandes proposées ont une longueur de 18 ou 24 cm le long de l'arête à recouvrir, correspondant aux arêtes supérieures du couvercle.
- Constater que les bandes dont une extrémité ou plus est rectangulaire, ou celles dont une extrémité ou plus présente un angle droit rentrant (comme B ou D) ne peuvent convenir car elle recouvrent 2 cm d'une arête adjacente supérieure, ce qui est exclu selon la remarque précédente.
- Il ne reste alors que les modèles de bandes A, C, et E à placer dans la longueur du couvercle, dont la partie « courte » de la bande doit être collée sur la face supérieure (pour ne pas recouvrir une autre arête de cette face) et dont la partie « longue » repliée recouvrira une arête verticale (E) ou recouvrira un rectangle de 2 cm de large d'une face verticale (A et C).
- Dans la largeur du couvercle, penser aussi à coller la partie « courte » des bandes de 18 cm de longueur sur la face supérieure. Éliminer alors le modèle de bande I qui recouvrirait une des longues bandes (A, C, ou E) et dresser l'inventaire des possibilités :
  - avec deux bandes de modèle C, on ne peut choisir que deux bandes de modèle H (solution C, H, C, H),
  - avec deux bandes A, on ne peut choisir que deux bandes G (et non F !) (solution A, G, A, G),
  - avec deux bandes E, on ne peut choisir que deux bandes J (solution E, J, E, J)
  - avec A et C, on ne peut choisir que H et G (et non F !) (solution A, G, C, H ou C, H, A, G), mais pas (A, F, C, H), ni (C, H, A, F),

- avec A et E, on ne peut choisir que J et G (et non F !) (solution A, J, E, G ou E, G, A, J), mais pas (A, G, E, J) ou (E, J, A, G), ni (A, J, E, F) ou (E, F, A, J)
- avec C et E, il y a une solution, déjà indiquée dans l'exemple de l'énoncé : (C, F, E, G) (ou E, G, F, C), mais pas (C, G, E, F) ou (E, F, C, G)

Ou : découper les bandes, les plier et procéder par essais pour déterminer les cinq nouveaux ensembles ci-dessus.

Attribution des points

4 Réponse exacte : les cinq ensembles de bandes et leur écriture ordonnée : CHCH ; AGAG ; EJEJ ; AGCH ou CHAG ; AJEG ou EGAJ (ou six ensembles, en reprenant l'exemple CFEG ou EGFC)

3 Une erreur : oubli ou solution erronée

2 Deux ou trois erreurs

1 Quatre ou cinq erreurs

0 Six erreurs ou plus, ou incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Sassari

Pour les correcteurs :

	solutions exactes :	solutions erronées les plus probables (avec une bande retournée)
1) avec deux bandes A :	AGAG	A**F**A**F**, AGA**F**, ...
2) avec deux bandes C :	CHCH	
3) avec deux bandes E :	EJEJ	
4) une A et une C	AGCH ou CHAG	A**F**CH ou CHA**F**, ...
5) une A et une E	AJEG ou EGAJ	AJE**F** ou E**F**AJ, A**G**E**J** ou E**J**A**G**
6) une E et une C (exemple)	CFEG ou EGFC	C**G**E**F** ou E**F**C**G**

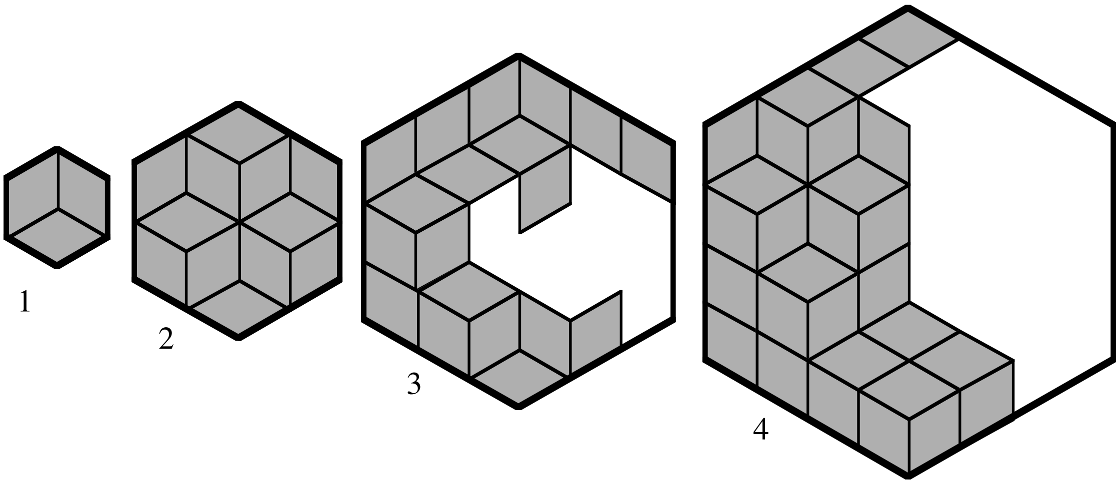
16. LES HEXAGONES DE RENÉ. (Cat. 7, 8, 9, 10)

René a un jeu de pavés constitué de très nombreux losanges égaux avec deux angles de 60 degrés.

Avec ses pièces René construit des hexagones réguliers.

Pour construire l'hexagone le plus petit (de taille 1), il utilise trois losanges. Pour construire le suivant (de taille 2), il en utilise 12. Ainsi de suite ...

Sur cette figure, on voit les hexagones de tailles 1 et 2 complétés dans une certaine disposition des losanges, ainsi que le début de la construction des hexagones de tailles 3 et 4.



Combien de losanges René utilisera-t-il pour construire l'hexagone de taille 12 ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique (addition, multiplication, carré, suite, proportions, …)
- Géométrie : losange, hexagone, pavage

Analyse de la tâche

- Comprendre que si on prend comme unité de longueur un côté d'un losange, les longueurs des côtés des hexagones successifs sont 1, 2, 3, 4, ... et correspondent « aux tailles ». Prendre un losange comme unité d'aire.
- Se rendre compte que, quelle que soit la disposition des losanges, le nombre de losanges ne change pas pour un hexagone d'une taille donnée, car son aire est donnée.
- Compléter les hexagones de tailles 3 et 4 et compter leurs losanges : 27 et 48.
- Examiner la suite des nombres de losanges : 3, 12, 27, 48, ... et chercher une règle de passage d'un terme au suivant par conjectures et vérifications. Par exemple, la multiplication par 4 qui permet de passer de 3 à 12 ne convient plus pour le passage de 12 à 27.

  Le calcul des différences d'un nombre au suivant fait en revanche apparaître une régularité intéressante : une augmentation du nombre de losanges, de 6 en 6, d'une taille à la suivante :

« tailles » :	1		2		3		4		---
suite des nombre :	3		12		27		48		---
différences		9		15		21		....	

  ce qui permet de conjecturer que de **12 = 3** + 3 + 1 x 6 ; **27 = 12** + 3 + 2 x 6 ; **48 = 27** + 3 +3 x 6 et que le terme suivant pourrait être **75 = 48** + 3 + 4 x 6.
- Se rendre compte alors qu'il est nécessaire de vérifier cette conjecture sur l'hexagone de taille 5, puis de taille 6, en dessinant les figures correspondantes ou en « prolongeant » celle de taille 4, ... (cette vérification nécessite toutefois des dessins précis, à la règle pour pouvoir y marquer les losanges et les dénombrer).

  La conjecture vérifiée sur quelques exemples, elle peut être utilisée pour arriver à l'hexagone de taille 12, par le calcul de tous les termes successifs : **108 = 75** + 3 + 5 x 6 ; 147 ; 192 ; 243 ; 300 ; 363 ; **432**

Ou : trouver d'autres régularités dans les différences successives qui sont des produits des nombres impairs multipliés par 3. (9 = 3 x 3, 15 = 5 x 3, 21= 7 x 3, 27 = 9 x 3, ...)

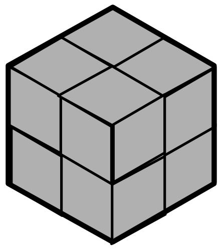
Ou : factoriser les nombres de la suite en fonction de la taille de l'hexagone :

taille	1	2	3	4	5	...
nb. losanges	3 =3 x 1	12 = 3 x 2 x 2	27= 3 x 3 x 3	48 = 3 x 4 x 4	75 = 3 x 5 x 5	...

On arrive ainsi au lien « fonctionnel » entre la taille (n) de l'hexagone et le nombre de losanges n —> 3 x n^2, ce qui conduit, pour n = 12 à 3 x 12^2 = 3 x 144 = 432, sans passser par les termes successifs.

Remarque : ce lien est « naturel » pour les élèves qui savent qu'en doublant les dimensions de l'hexagone de taille 1 (ou de toute autre figure), on multiplie son aire par 4 = 2^2 ; en les triplant on multiplie son aire par 9 = 3^2 ; en les multiplant par 12, on multiplie l'aire par 12^2.

Ou : faire un remplissage « régulier » de l'hexagone (où tous les losanges de même orientation sont regroupés) conduisant à la représentation d'un cube en perspective cavalière : le cube présente 3 faces identiques, pavées par n x n losanges, d'où le nombre $3n^2$ et la réponse 3 x 12^2 = 432.



Attribution des points

4 Réponse correcte (432) avec une justification complète (dessin des premières boîtes, utilisation d'une série et validation sur le 5^e hexagone au moins, lien fonctionnel, ...)

3 Réponse correcte (432) avec explications incomplètes
ou réponse erronée suite à une erreur de calcul avec explications complètes

2 Réponse correcte obtenue sans explications
ou réponse erronée due à une erreur de calcul ou de comptage avec explications incomplètes

1 Réponse erronée mais début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Belgique

17. NOMBRES IMPAIRS (Cat. 7, 8, 9, 10)

Monsieur Othello se passionne pour les nombres entiers, et plus particulièrement pour les nombres impairs. D'ailleurs, son nombre préféré est 95.

Pour son anniversaire, sa femme Desdémone lui a offert cinq plaquettes carrées en or sur lesquelles elle a fait graver des chiffres :

0	1	5	8	9

Monsieur Othello remarque que chaque fois qu'il dispose les cinq plaquettes sur une ligne, il peut lire un nombre inférieur à 100 000 mais supérieur à 1 000.

L'intérêt que Monsieur Othello porte aux nombres impairs ne se fait pas attendre et il se demande :

- Combien de nombres impairs, supérieurs à 9 500 et inférieurs à 95 000, est-il possible de former avec mes cinq plaquettes ?

Aidez Monsieur Othello à répondre à cette question et justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : écriture des nombres et des nombres impairs (principes de numération)
- Logique : essais organisés, combinatoire

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que les nombres impairs de 4 chiffres, supérieurs à 9 500, doivent avoir 9 comme chiffre des milliers et 1 ou 5 comme chiffre des unités, le 0 étant toujours positionné à gauche dans les dizaines de milliers. On obtient trois nombres impairs : 9581, 9851, 9815.
- Pour déterminer combien il y a de nombres impairs, composés de 5 chiffres, inférieurs à 95 000, et éviter les oublis, il convient d'adopter une procédure organisée.
- Tous les nombres impairs devront se terminer par 1, 5 ou 9. Pour ceux qui se terminent par 1, le chiffre des dizaines de milliers sera 5, 8 ou 9, d'où les trois possibilités suivantes : 5 .. .. .. 1; 8 .. .. .. 1; 9 .. .. .. 1. Dans le premier cas, les chiffres manquants, 0-8-9, peuvent être combinés de toutes les manières possibles (089, 098, 809, 890, 908, 980) et on obtient alors six nombres impairs se terminant par le chiffre 1; dans le second cas, en suivant le même raisonnement, on obtient six autres nombres impairs se terminant par le chiffre 1; dans le troisième cas, seuls deux nombres sont possibles car le 0 doit obligatoirement être le chiffre des milliers (90581 et 90851). Au total, il y a donc 6 + 6 + 2 = 14 nombres impairs qui se terminent par le chiffre 1. Pour les nombres impairs se terminant par 5, il y a aussi trois possibilités : 1 .. .. .. 5; 8 .. .. .. 5; 9 .. .. .. 5. Les deux premières posssibilités donnent chacune 6 nombres impairs, la dernière possibilité n'en donnant que 4. Au total, il y a donc 6 + 6 + 4 = 16 nombres impairs qui se terminent par le chiffre 5. Pour les nombres impairs se terminant par 9, il y a aussi trois possibilités: 1 .. .. .. 9; 5 .. .. .. 9; 8 .. .. .. 9, chaque possibilité permettant d'obtenir 6 nombres impairs, il y a donc en tout 6 x 3 = 18 nombres impairs qui se terminent par 9. Au final, ce sont donc 3 + 14 + 16 + 18 = 51 nombres impairs qu'il est possible d'obtenir.

Ou : procéder par un raisonnement de type combinatoire : considérer que pour obtenir un nombre impair à 5 chiffres, il y a trois possibilités pour le chiffre des unités (1, 5, 9), trois possibilités pour les dizaines de milliers en excluant le 0 et le chiffre utilisé pour les unités, il y a trois possibilités pour le chiffre des milliers (le 0 et les deux autres chiffres non encore utilisés), deux possibilités pour le chiffre des centaines (les deux chiffres restant) et une possibilité pour le chiffre des dizaines (le dernier chiffre non encore utilisé). Au total, 3 x 3 x 3 x 2 x 1 = 54 nombres impairs. Cependant, 6 nombres impairs sont supérieurs à 95 000 (95081, 95801, 98051, 98501, 98015, 98105) et il convient de les soustraire du total. 54 - 6 = 48. En dernier lieu, il faut ajouter les 3 nombres impairs de 4 chiffres supérieurs à 9 500. 48 + 3 = 51.

Ou : construire des tableaux de nombres de 9500 à 95000 qui répondent aux conditions (ne contiennent pas les chiffres 2, 3, 4, 6 et 7, qui se terminent par 1, 5, 9, qui n'ont pas deux chiffres égaux) et de manière organisée, par exemple, de 9500 à 9999, de 10000 à 11000, de 50000 à 60000, de 80000 à 90000, de 90000 à 100000.

Attribution des points

4 Réponse correcte (51 nombres impairs) avec une justification détaillée permettant de suivre le raisonnement adopté.

3 Réponse correcte avec des explications confuses,
ou réponse 48 (seuls les nombres à 5 chiffres ayant été pris en considération) avec un raisonnement explicité

2 Réponse 57 (= 3 + 6 x 9) ne tenant pas compte de la limite supérieure de 9'000

ou réponse juste sans aucune explication

ou réponse proche de 51 due à quelques oublis lors de la recherche, mais témoignant d'une procédure organisée

1 Début de recherche cohérente reposant sur la typologie des nombres

0 Incompréhension de la tâche

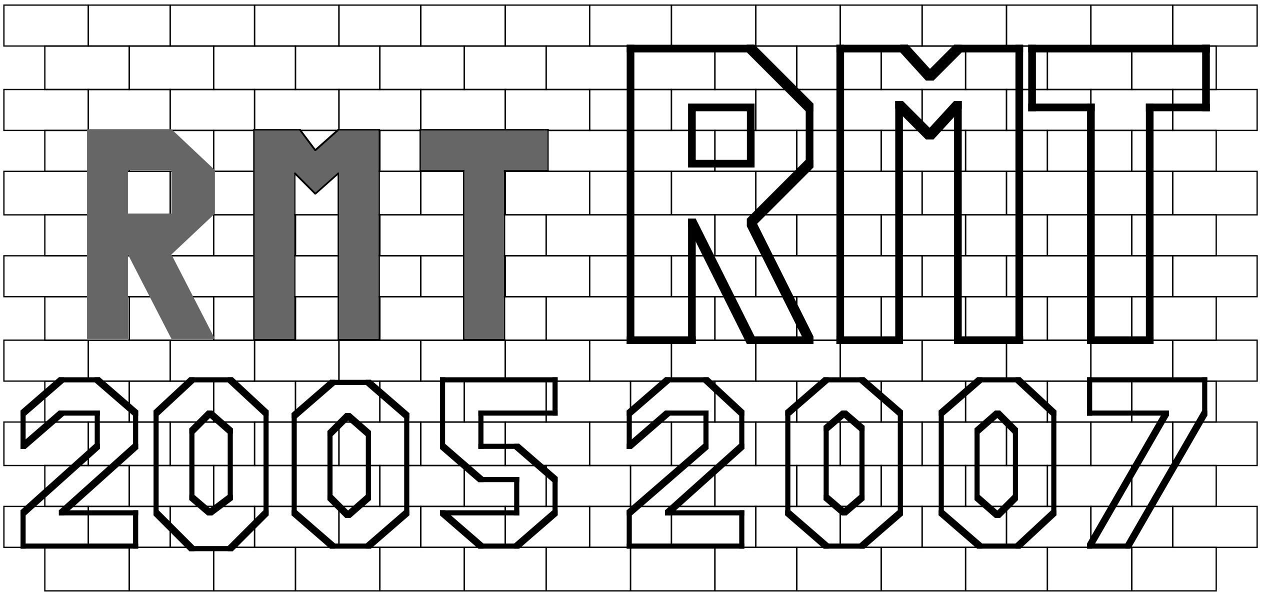
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena

18. RMT 2007 (Cat. 8, 9, 10)

Il y a deux ans, les élèves du « Collège de Transalpie » avaient peint l'inscription « RMT 2005 » sur un mur de leur école, en l'honneur de la finale du Rallye mathématique transalpin qui se déroulait dans leur établissement.

Cette année, c'est le même collège qui accueille la finale et les élèves ont décidé de peindre une nouvelle inscription « RMT 2007 » à côté de l'ancienne, avec les trois lettres RMT de même forme mais plus grandes, sur 7 rangs de briques au lieu de 5 rangs.



En 2005, ils avaient utilisé 16 boîtes de peinture pour peindre les trois lettres RMT en gris. Ils se demandent combien ils vont en utiliser cette année.

Julie dit : « *Les nouvelles lettres ont 2 briques de plus, en hauteur, que les anciennes ; on utilisera donc 18 boîtes : 2 de plus que 16.* »

Robert dit : « *Non, il ne faut pas faire une addition, mais une multiplication, qui fait passer de 5 à 7.* »

Ursula dit : « *Ça ne suffira pas. On voit bien que les nouvelles lettres sont aussi plus larges. Il faudra le double de peinture : 32 boîtes.* »

Jacques : *« Il suffit de compter les briques. »*

Hélène : *« Mais ça ne tombera pas juste.* »

Selon-vous, combien de boîtes de peinture grise au minimum faudra-t-il acheter pour les trois nouvelles lettres RMT ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations, proportionnalité
- Géométrie : agrandissement (homothétie ou similitude) et aire

Analyse de la tâche

- Analyser les différentes suggestions exposées dans l'énoncé et les « critiquer ».
- Se rendre compte que le comptage des briques n'est pas pratique ni simple et que les risques d'erreurs sont élevés, comme le dit Hélène.
- Se rendre compte que les dimensions des figures augmentent dans un rapport de 5 à 7, non seulement en hauteur mais aussi en largeur comme le dit Ursula. Il s'agit en fait d'un problème de similitude et pour lequel le rapport des aires n'est pas le même que le rapport des longueurs.

- Comprendre que si la nouvelle hauteur est 7/5 de l'ancienne, il en va ainsi de la largeur. Penser alors aux lettres comme à des rectangles (par exemple 5 x 3 devient 7 x 21/5) et surmonter ici l'obstacle principal qui est celui de l'approximation par des figures dont l'aire est « calculable ».
- Après avoir compris que le rapport des aires est de 49/25, multiplier 16, le nombre de pots, par 49/25, ou poser la proportion $x/16 = 49/25$ et trouver $x = (49 \times 16) / 25 = 784/25 = 31,36$.
- Déterminer enfin le nombre de pots qui doit être le nombre entier supérieur à 31,36, c'est-à-dire 32, comme le dit Ursula.

Attribution des points

4 Réponse «32 pots», avec explication de la procédure

3 Réponse juste avec explications incomplètes

2 Réponse 31,36 ou 31, avec explications

1 Réponse 32 pots (comme Ursula) sans aucune autre explication
ou réponse 31,36 ou 31, sans explications

0 Réponse 16 x 7/5 ou 112/5 ou 22,4 (arrondie ou non) ou incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

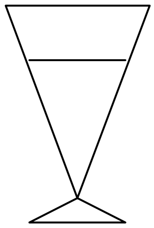
Origine: C.I.

19. L'APÉRITIF (Cat. 9, 10)

Paul et Françoise sont confortablement installés au bar du Petit Pêcheur. Le verre, que le patron pose devant Paul, a la forme d'un cône. Il est rempli à ras bord.

Tout en écoutant son amie Françoise, Paul savoure son jus d'orange.

Après une minute, Françoise remarque que le niveau du liquide contenu dans le verre de Paul a baissé d'un tiers.



En supposant que Paul continue de boire son verre au même rythme, après combien de secondes celui-ci sera-t-il vide ?

Expliquez votre raisonnement.

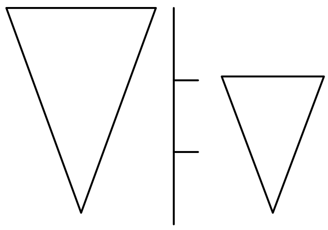
ANALISI A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie: solides, volume du cône et du tronc de cône, rapport de similitude, approximations

Analyse de la tâche

- Comprendre que, vu que le débit est supposé constant, la durée d'absorption est proportionnelle au volume du liquide qui a été bu.
- Comprendre que les hauteurs des deux cônes de liquide (correspondant au verre plein et au verre après une minute) sont dans un rapport de 3/2.
- En déduire que le rapport des volumes des deux cônes de liquide est 27/8 $(3/2)^3$ et que le rapport entre la partie déjà bue et celle qui reste à boire est 19/8.
- En désignant par t le temps requis pour finir de boire, poser la proportion $t/60 = 8/19$ et en déduire que $t = 480/19 \approx 25, 26$, en secondes. La formulation de la question demande un arrondi à la seconde supérieure et le temps nécessaire pour que le verre soit vide est 26 secondes.



Ou : par calcul littéral, en utilisant les formules du volume du cône et du tronc de cône, en choisissant par exemple r, h, R, H respectivment pour les rayons et hauteur du petit et du grand cône, écrire :

($V_{\text{tronc}}=1/3\ \pi(H - h)(R^2 + rR + r^2)$ et $V_{\text{cône}} = 1/3\ \pi r^2 h$. Par similitude, on sait que $H = 3/2h$ et $R = 3/2r$, ce qui donne : $V_{\text{tronc}}=19/24\pi hr^2$. On peut ainsi poser la proportion : $t/60= V_{\text{cono}}/V_{\text{tronco}}$ et en déduire que $t = 60(1/3\pi r^2 h)/ 19/24\pi hr^2 =$ $= 480/19$.

Attribution des points

4 Réponse correcte (26 secondes) avec justifications complètes

3 Réponse correcte, avec justifications incomplètes

ou réponse approchée de manière incorrecte (par exemple 25 secondes, ou 25,26, sans signe d'estimation, non arrondie à la seconde supérieure), avec justifications complètes

ou réponse correspondant à la durée totale (86 secondes) avec justifications

2 Réponse correcte sans justification

ou raisonnement correct avec une erreur de calcul

ou réponse correspondant à la durée totale (86 secondes) avec justifications incomplètes

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine :Parma

20. TOUJOURS 6 (II) (Cat. 9, 10)

Toto s'apprête à effectuer la multiplication 7,5 x 0,8 sur sa calculatrice. Avant de presser la touche « = » il se dit :

Je vais voir apparaître un nombre de deux chiffres après la virgule car ma grand-mère m'a dit que si on multiplie deux nombres qui ont chacun un chiffre après la virgule, on obtient un nombre qui s'écrit avec deux chiffres après la virgule.

Toto presse alors la touche « = » et, surprise, c'est le nombre 6 qui apparaît !

Il vérifie avec d'autres calculatrices et chaque fois il trouve que 7,5 x 0,8 = 6.

Il se demande alors s'il y a d'autres couples de nombres que 7,5 et 0,8 qui ont aussi chacun un chiffre après la virgule et dont le produit est 6.

Et vous, qu'en pensez-vous ? Combien y a-t-il de couples de nombres décimaux ayant chacun un chiffre après la virgule dont le produit est 6 ?

Et combien y a-t-il de couples de nombres décimaux ayant chacun deux chiffres après la virgule dont le produit est 6 ?

Écrivez tous ces couples et dites comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication des nombres décimaux, multiples et diviseurs, factorisation

Analyse de la tâche

- Vérifier que le produit de 7,5 et 0,8 est bien 6, sur une calculatrice et « à la main », pour se rendre compte que la règle de la grand-mère n'est pas vraie pour tous les produits car les deux chiffres après la virgule peuvent être des « 0 », qui ne s'écrivent pas.
- Comprendre d'abord que l'un des deux facteurs présente un 5 comme chiffre des dixièmes.
- Chercher d'autres couples de nombres décimaux d'un chiffre après la virgule dont le produit est 6 en tenant compte que l'un des facteurs est de la forme ...,5 (5 comme chiffre des dixièmes). Essayer par exemple toutes les divisions de 6 successivement par 0,5, 1,5, etc.. (6 : 0,5 = 12, 6 : 1,5 = 4 ; 6 : 2,5 = 2, 4 ; 6 : 3,5 = 1,7428.... ; 6 : 4,5 = 1,333... ; 6 : 5,5 = 1,0909... ; 6 : 6,5 = 0.923... ; 6 : 7,5 = 0,8 ; 6 : 8,5 = ...) et constater, en continuant bien au-delà de 6 : 8,5, qu'il n'y en a que deux qui conviennent et conduisent aux couples 2,4 ; 2,5 et 7,5 ; 0,8 (déjà connu).

Ou : penser à, par exemple, 600 à la place de 6,00 et décomposer 600 en facteurs premiers : 600 = 2 x 2 x 2 x 3 x 5 x 5. Parmi les couples de nombres dont le produit est 600, on ne doit prendre en compte que ceux dont les chiffres des unités sont différents de 0 pour obtenir, en revenant au produit 6, que ceux ayant un chiffre après la virgule différent de 0. C'est-à-dire qu'il faut éviter des nombres composés de facteurs 2 et 5 simultanément. Il n'y a donc que 2 x 2 x 2 = 8 et 2 x 2 x 2 x 3 = 24 d'une part, 3 x 5 x 5 = 75 et 5 x 5 = 25 d'autre part.

Ou : imaginer le problème dans un cadre géométrique comme la recherche de tous les rectangles de 6 dm^2 dont les mesures des côtés ont un nombre de 1 chiffre après la virgule, en dm, ou sont un nombre entier en cm -non multiple de 10. On est ainsi ramené à la recherche des couples de diviseurs de 600, dans l'ensemble des nombres naturels (1 ; 600), (2 ; 300), ... (**8 ; 75**), ... (20 ; 30), (**24 ; 25**) dont deux seuls conviennent.

Ou : se fonder sur les règles de multiplication des fractions et rechercher les couples tels que a/b x c/d = 600/100 en dressant l'inventaire des dénominateurs tels que b x d = 100 et qu'il ne faudra retenir que les fractions qui s'écrivent sous forme de nombres décimaux d'un chiffre exactement après la virgule.

- La recherche des couples de nombres décimaux ayant chacun deux chiffres après la virgule et dont le produit est 6 exige une procédure économique, par exemple celle qui se réfère au cadre géométrique (rectangles de 6 dm^2 dont les mesures des côtés sont un nombre entier de mm, non multiple de 10. Il faut alors faire l'inventaire des couples de diviseurs de 60000, comme il y en beaucoup (30 couples), on peut observer la décomposition en facteurs premiers de 60000 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 5 x 5 x 5 x 5 et se rendre compte que, pour éviter les multiples de 10, il faut éviter de regrouper un facteur 2 et un facteur 5 et ne considérer que 5^4 = 625, avec son complémentaire 2^5 x 3 = 96 et l'autre possibilité 3 x 5^4 = 1875 et son complémentaire 2^5 = 32.

Attribution des points

4 Réponse exacte complète : « 2 couples de nombres de 1 chiffre après la virgule : (2,4 ; 2,5) et (0,8 ; 7,5) (la citation de ce dernier n'est pas obligatoire puisqu'elle figure dans l'énoncé) et 2 couples avec deux chiffres après la virgule : (0,32 ; 18,75) et (0,96 ; 6,25), avec explications ou descriptions des essais montrant que toutes les solutions sont là

3 Réponse exacte complète, avec explications incomplètes : doutes sur l'exhaustivité

ou deux des trois nouveaux couples avec explications de la méthode

2 Les deux réponses sans explications

ou deux des trois couples cherchés, avec explications peu claires

1 deux des trois couples cherchés, sans explications

ou un seul des trois nouveaux couples avec explications peu claires

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origines : C.I.

21. UNE RENCONTRE VIRTUELLE (Cat. 9, 10)

Alain, Bob et Charles habitent très loin les uns des autres et, de temps en temps, échangent des informations par Internet. Ils découvrent ainsi que les villes où vivent Bob et Charles se trouvent sur le même méridien : celle de Charles à 30° sous l'Équateur et celle de Bob à 60° au-dessus de l'Équateur. Les villes de Bob et d'Alain se situent sur le même parallèle mais en des points diamétralement opposés.

D'après vous, quel arc est le plus long : l'arc de méridien qui va de Bob à Charles ou l'arc de parallèle qui va de Bob à Alain?

Expliquez votre raisonnement.

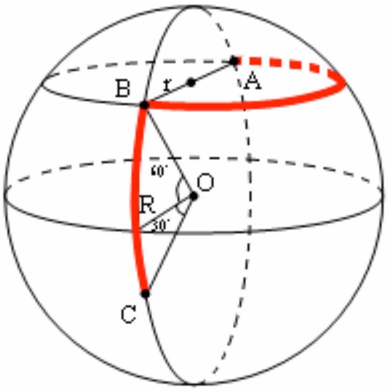
ANALYSE A PRIORI

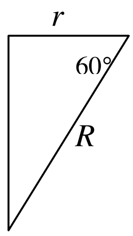
Domaine de connaissances

- Géométrie plane : angles, circonférence, arcs de circonférence, proportionnalité entre arcs et angles, proprietés des triangles équilatéraux
  Géométrie dans l'espace : sphère et section de la sphère

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut mesurer et comparer deux arcs de circonférence de rayons différents (respectivement *R* celui de la Terrr et *r* celui du parallèle sur lequel se trouvent Bob et Alain)
- Comprendre que les angles des deux arcs sont respectivement 90° et 180° et que le rayon *r* est la moitié du rayon *R* (ce qui se déduit des propriétés des triangles rectangles avec des angles de 30° et 60°, voir figure)





- L'arc de méridien qui va de Bob à Charles est un quart de circonférence de rayon *R* et l'arc de parallèle qui va de Bob à Alain est une demi-circonférence de rayon *R*/2. En déduire que la longueur des deux arcs est la même.

Attribution des points

4 Réponse correcte (arcs de même longueur) avec justifications complètes

3 Réponse correcte avec justifications incomplètes

2 Réponse correcte sans justification ou raisonnement correct avec une erreur de calcul

1 Début de raisonnement correct (par exemple, les arcs sont bien compris : un quart de cercle de rayon *R* et un demi-cercle de rayon *r*, sans faire la relation entre *r* et *R*)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma