	345678910	Ar	Al	Ge	Mes	Lo	Co	sections
1. Perles rouges	3	x						PR
2. Les puzzles	34	x		x				BB
3. Classes internationales	34	x					x	LU+PR
4. Carré ou rectangle ?	345			x	x			PU
5. La maison	345			x				FC
6. Le prix des salades	45	x						SR
7. Les nombres de Bernard	456	x				x	x	GE
8. Le marché aux livres	56	x				x		TI
9. Nombres à trouver	567	x					x	FC
10. Points de vue	567			x				FC
11. Le serpent de bois	678	x		x				SI
12. L'horloge digitale	678	x			x		x	GE
13. Composition de roses	678910	x	x					SI
14. Anniversaires et bougies	78910	x	x			x		SI
15. Fractions superposées	78910	x						ISR
16. Cubes cachés	8910		x		x			CI
17. Treize à table	8910	x						CI
18. Un satellite au-dessus de l'équateur	910	x		x	x			FC
19. Gagnants et perdants	910	x				x		CI

1. PERLES ROUGES (Cat. 3)

Martine et Charlotte ont trouvé des perles jaunes, des bleues et des rouges. Elles décident de faire chacune un collier où les perles sont enfilées régulièrement : une perle jaune au début, suivie de deux perles bleues et de trois perles rouges ; puis de nouveau une perle jaune, deux bleues et trois rouges ; et ainsi de suite. Leurs deux colliers se terminent par trois perles rouges.

Le collier de Martine a 14 perles bleues.

Le collier de Charlotte a 30 perles en tout.

Combien y a-t-il de perles rouges dans le collier de Martine ?

Combien y a-t-il de perles rouges dans le collier de Charlotte ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations élémentaires avec des nombres naturels, proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a des relations (de proportionnalité) entre les nombres de perles de chacune des trois couleurs : 1 jaune correspond à 2 bleues ; 1 jaune correspond à 3 rouges ; 2 bleues correspondent à 3 rouges
- À partir d'une ou deux des relations précédentes, déterminer le nombre de perles rouges du collier de Martine.

  Par exemple : imaginer la répartition des 14 perles bleues en 7 groupes de 2 perles et déterminer combien font 7 groupes de 3 perles rouges : 3 x 7 = 21. Ou passer explicitement par les perles jaunes : 14 : 2 = 7 et multiplier par 3 le nombre de perles jaunes pour trouver les rouges.
- Comprendre aussi qu'il y a une relation entre le nombre total des perles et ceux des perles de chaque couleur en remarquant que chaque séquence « jaune-bleue-rouge » est composée de 6 perles. Les relations sont alors 6 perles d'une séquence correspondent à 1perle jaune, 2 bleues et 3 rouges.
- À partir d'une ou plusieurs des relations précédentes, déterminer le nombre de perles rouges du collier de Charlotte.

  Par exemple 30 perles forment 5 séquences de 6 perles (30 : 6) et dont 5 jaunes, 10 bleues et 15 rouges, ou les perles rouges sont la moitié du nombre total de perles (relation 6 à 3) et il y a 15 perles rouges (30 : 2) dans le collier de Charlotte.

Ou : obtenir les réponses correctes au moyen d'un schéma ou d'un dessin des deux colliers.

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (21 perles rouges pour Martine, 15 rouges pour Charlotte) avec détail des calculs ou explication avec dessin ou schéma

3 Les deux réponses correctes avec explications incomplètes
ou une seule réponse correcte et une imprécision pour l'autre, avec explications pour les deux réponses

2 Les deux réponses correctes sans explication
ou une seule réponse correcte avec explications

1 Une seule réponse correcte sans explication

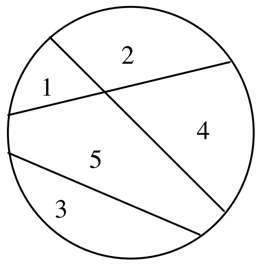
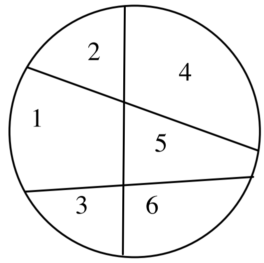
0 Incompréhension du problème

Niveau : 3

Origine : Parma

2. LES PUZZLES (Cat. 3, 4)

Des enfants découpent des disques en carton pour fabriquer des puzzles. Pour cela, ils tracent des segments reliant deux à deux des points du bord de leur disque.

En traçant 3 segments, **Caroline** a partagé son disque pour faire un puzzle de 5 pièces : 	Avec 3 segments aussi, **Denis** a obtenu, une pièce de plus. Son puzzle a 6 pièces : 

Albert décide de tracer aussi 3 segments dans son disque, et il espère obtenir plus de pièces que Denis.

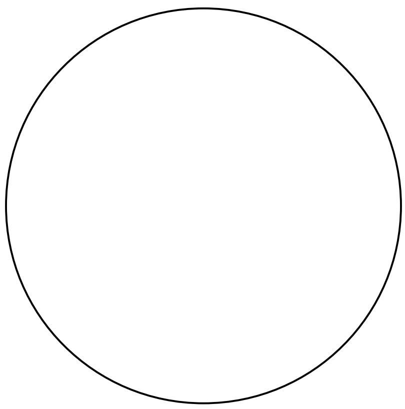
Barbara trace 4 segments pour obtenir encore plus de pièces.

Quel est le plus grand nombre de pièces que peut obtenir Albert ?

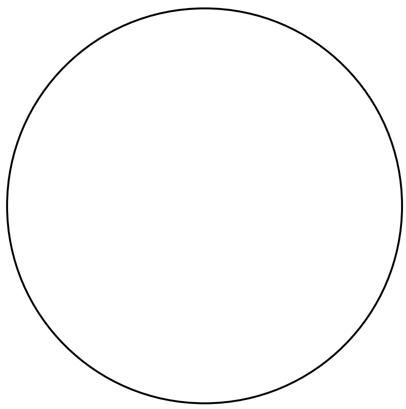
Quel est le plus grand nombre de pièces que peut obtenir Barbara ?

Dessinez les disques d'Albert et de Barbara avec le plus possible de pièces.

Albert, avec 3 segments



Barbara, avec 4 segments



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

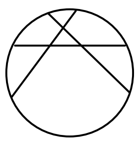
- Géométrie : disque, cordes et régions
- Dénombrement

Analyse de la tâche

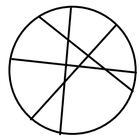
- Comprendre qu'il faut décomposer la surface du disque en traçant des cordes.
- Analyser les deux exemples, et envisager un lien entre le nombre de points d'intersection des cordes et le nombre de parties de disque.
- Comprendre que chaque nouvelle corde partage une région de disque qu'elle « traverse » - région définie par les cordes précédentes – en deux parties et que, par conséquent, il faut chercher à la dessiner de manière à « traverser » le plus possible de régions déjà définies ou à « couper » le plus possible de cordes déjà dessinées.
- Appliquer la constatation précédente : « plus il y a d'intersections de cordes, plus il y a de régions » et dessiner les cordes successives en tentant de « couper » toutes celles qui sont déjà dessinées.

  Constater encore qu'il faut éviter les intersections communes à plus de deux cordes (ou cercle). Par exemple, 3 cordes peuvent déterminer, deux à deux, trois points d'intersection. Si elles sont concourantes, elles n'en déterminent qu'un seul, ce qui fait disparaître la région triangulaire déterminée par les trois points.
- Dessinez les cordes de manière optimale, pour chaque disque, et dénombrer les régions correspondantes.

Albert peut obtenir 7 pièces :



Barbara 11 pièces :



Attribution des points

4 Les deux partages optimaux avec dessins précis permettant un comptage exact : 7 et 11

3 Les deux partages optimaux mais avec une erreur de comptage dans le partage de Barbara (10 ou 12 au lieu de 11)

2 Le partage d'Albert optimal et le partage de Barbara en 10 pièces, les comptages correspondants sont exacts
ou le partage d'Albert en 6 pièces et celui de Barbara optimal, les comptages correspondants sont exacts

1 Le partage d'Albert optimal et le partage de Barbara en 9 pièces seulement
ou le partage d'Albert en 6 pièces et celui de Barbara en 10 pièces

0 Incompréhension du problème ou partages et comptages présentant plus de deux « insuffisances »

Niveau : 3, 4

Origine : Bourg-en-Bresse

3. CLASSES INTERNATIONALES (Cat. 3, 4)

Pour former les classes de 5e primaire, le directeur d'une école internationale consulte la liste des élèves inscrits et constate qu'il y a :

13	Italiens	11	Français
10	Américains	1	Chinois
8	Suisses	7	Allemands
9	Marocains	4	Hollandais

Le directeur veut former trois classes ayant le même nombre d'élèves, tout en laissant les enfants d'une même nationalité dans la même classe.

Décrivez toutes les manières possibles de former les trois classes.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Arithmétique : décomposition additive de nombres, addition, division
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Calculer la somme de tous les élèves, 63 et en déduire que chaque classe aura un effectif de 21 (63 : 3)
- Trouver toutes les décompositions de 21 en sommes de deux termes ou plus qui tiennent compte des nombres d'élèves des différentes nationalités :

  en deux termes 21 = 13 + 8 ou 21 = 11 + 10; en trois termes: 21 = 13 + 7 + 1 = 11 + 9 + 1 = 10 + 7 + 4 = 9 + 8 + 4 ;

  en quatre termes: 21 = 9 + 7 + 4 + 1
- Combiner entre elles les décompositions précédentes de manière à ne pas répéter les mêmes nombres dans une même combinaison, obtenir les trois répartitions possibles des élèves dans les classes

Solutions	Classe A	Classe B	Classe C
1	11,10	13, 7, 1	9, 8, 4
2	11,10	13, 8	9, 7, 4, 1
3	13, 8	10, 7, 4	11, 9, 1

Ou: penser que dans la classe des 13 Italiens les 8 autres élèves ne peuvent être que les 7 Allemands et le Chinois ou les 8 Suisses. Dans le premier cas, dans la classe des 11 Français, on ne peut ajouter que les 10 Américains pour arriver à 21, ce qui conduit à la solution 1 (la troisième classe ne peut être formée que de 8 + 9 + 4). Dans le second cas (21 = 13 + 8), la classe des 11 Français peut être complétée par les 9 Marocains et le Chinois (solution 3) ou avec les 10 Américains (et l'on arrive à la solution 2). Puisqu'il n'y a pas d'autres cas possibles, on peut conclure qu'il n'y a que ces trois solutions.

Attribution des points

4 Les trois solutions (voir tableau ci-dessus) avec vérification du fait que ces solutions conviennent (calculs ou explications du genre : 63 élèves, 21 par classe et vérifications pour chaque cas)

3 Les trois solutions avec explications incomplètes
ou deux solutions avec la vérification des calculs
ou quatre solutions, une étant donnée deux fois

2 Deux solutions sans explications
ou une seule solution correcte avec le détail et la vérification des calculs

1 Début de recherche correct (avec au moins la détermination du nombre d'élèves par classe) et un essai de répartition avec contrôle, même si c'est pour l'invalider)

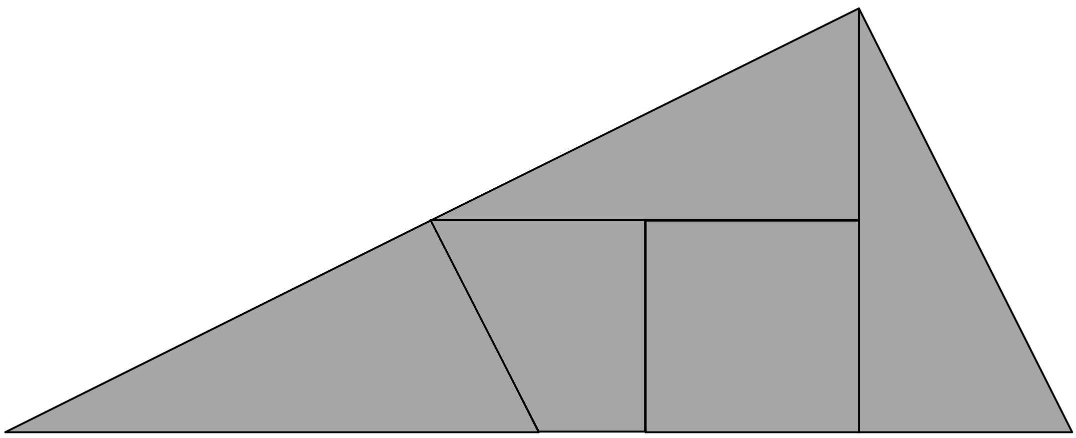
0 Incompréhension du problème

Niveau: 3, 4

Origine : Luxembourg, Parma

4. CARRÉ OU RECTANGLE ? (Cat. 3, 4, 5)

Voici un puzzle en forme de triangle, composé de cinq pièces :



Françoise dit qu'on peut former un puzzle carré avec ces cinq pièces, sans qu'elles se recouvrent et sans qu'il y ait de trou.

Julie dit qu'on peut aussi former un puzzle rectangle, non carré, avec ces cinq pièces.

Essayez de construire un carré avec ces cinq pièces et montrez comment vous avez fait.

Puis essayez de construire un rectangle, non carré, et montrez comment vous avez fait.

ANALYSE A PRIORI

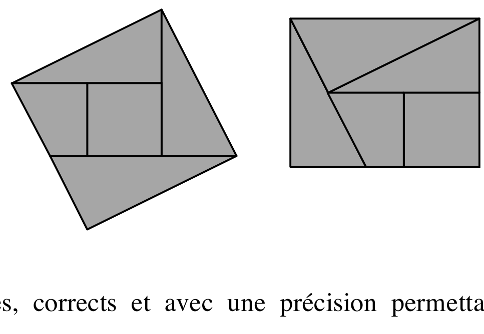
Domaine de connaissances

- Géométrie : manipulation et observation de figures : carrés, rectangles et triangles, angles
- Mesures : comparaison de côtés et d'angles

Analyse de la tâche

- Observer les cinq pièces et se rendre compte que si l'on veut reconstituer des puzzles, il faut les découper ou les reproduire très précisément pour pouvoir comparer leurs côtés et leurs angles.
- Se convaincre (explicitement ou implicitement, par des superpositions, juxtapositions ou mesures) : qu'une des pièces qui a quatre côtés est un carré, que l'autre a deux angles et deux côtés égaux à ceux du carré ; que les trois autres pièces sont des triangles un angle « comme ceux du carré » qui ont et que deux de ces triangles sont superposables ; ...
- Procéder par essais en découpant les pièces, les translatant, les tournant ou les retournant, (en identifiant en particulier les pièces qui permettent d'obtenir des angles droits ou des parallèles) ... jusqu'à obtenir le rectangle et le carré.

  Par exemple, une rotation d'un demi-tour du « grand triangle » autour du sommet droit permet d'obtenir le carré ; une rotation d'un demi-tour du « grand triangle » autour du sommet supérieur et une translation du triangle de droite permettent d'obtenir le rectangle non carré.



Attribution des points

4 Deux dessins ou assemblages de pièces découpées, corrects et avec une précision permettant de reconnaître clairement les cinq pièces

3 Un seul dessin ou un seul assemblage de pièces correct, l'autre figure étant approximative

2 Un seul dessin ou un seul assemblage de pièces correct, sans solution pour l'autre figure
ou deux dessins ou assemblages où une ou deux pièces ne sont pas reconnaissables ou très imprécises

1 Une figure reconstituée seulement mais imprécise ou incomplète

0 Incompréhension du problème

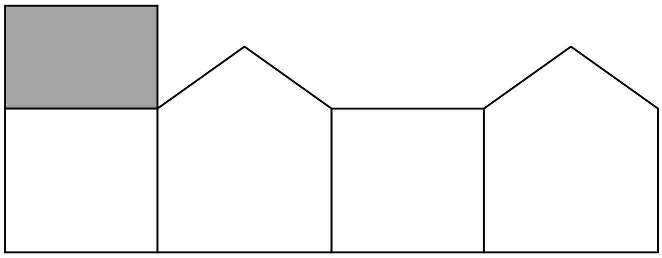
Niveau : 3, 4, 5

Origine : Puglia

5. LA MAISON (Cat. 3, 4, 5)

Jules veut construire une maison en découpant et en pliant une feuille de carton.

Il a déjà dessiné les 4 murs et une partie du toit, comme ceci :



Il doit encore dessiner l'autre partie du toit qui sera un rectangle de la même grandeur que celui qui est déjà dessiné en gris.

Jules constate qu'il peut ajouter le rectangle à plusieurs endroits, sur des côtés qui sont déjà sur son dessin.

De combien de manières Jules peut-il ajouter le rectangle gris sur la partie déjà dessinée ?

Pour chacune des manières trouvées, faites le dessin complet du modèle de la maison (à découper puis à plier) avec le nouveau rectangle gris (vous pouvez copier, recopier, coller ...).

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

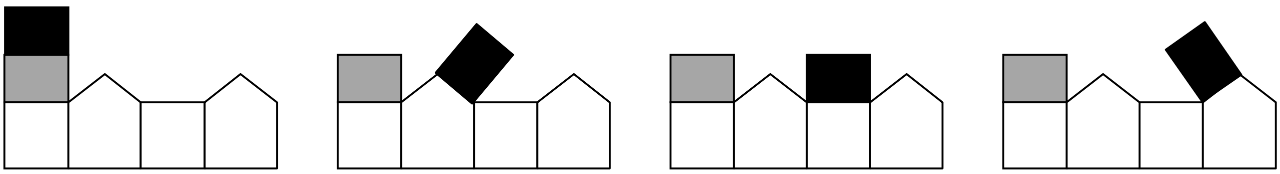
- Géométrie : lien entre la vision 2D d'un patron et le solide 3D obtenu par pliage, construction d'un rectangle

Analyse de la tâche

- Comprendre que le « patron » qui est une figure plane devra être découpé et plié pour réaliser la maison et que, avec les 4 façades et le pan du toit dessiné sur la figure, il ne se « referme » pas mais laisse un « trou » qui devra être comblé par l'autre pan du toit.
- Repérer les arêtes du patron sur lesquelles on pourrait adjoindre le rectangle qui manque et éliminer celles qui conduiraient à des superpositions ou qui laisseraient un « trou ».

  ou plier et « fermer » le patron incomplet, constater qu'il y a un « trou » rectangulaire et marquer les quatre arêtes de ce rectangle sur lesquelles pourrait être implanté le pan du toit qui manque.
- Trouver les quatre possibilités et, pour chacune d'elles, construire le rectangle en conservant ses dimensions et ses angles droits, en particulier pour les positions où il est placé sur des arêtes « obliques » de la maquette.
- Vérifier éventuellement les solutions par découpage, pliage et construction effective.

Les quatre patrons possibles :



Attribution des points

4 Solution complète et claire : les 4 patrons sont dessinés (ou collés) avec le rectangle placé (la précision du tracé n'est pas exigée mais on doit reconnaître le rectangle, ses angles droits, la largeur et la longueur)

3 Solution incomplète : avec une seule des « insuffisances » suivantes : absence ou répétition d'un des patrons, un patron conduit à une superposition de deux faces, un patron laisse un « trou » dû à une erreur ou une grosse imprécision dans le dessin du dernier pan rectangulaire

2 Solution incomplète avec seulement deux des « insuffisances » précédentes

1 Solution incomplète avec trois ou quatre des « insuffisances » précédentes

ou un seul patron correctement dessiné

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3, 4, 5

Origine : Franche-Comté

6. LE PRIX DES SALADES (Cat. 4, 5)

Marina va au marché pour acheter six salades.

Elle compare les prix affichés par trois marchands :

Marchand A	Marchand B	Marchand C
1,50 euro la salade *trois salades pour le prix de deux salades*	**1,20 euro la salade** quatre salades pour le prix de trois salades	**1 euro la salade**

Y a-t-il un marchand chez lequel Marina dépensera moins d'argent que chez les autres pour acheter ses six salades ?

Expliquez votre réponse et dites comment vous avec calculé le prix des six salades chez chaque marchand.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication

Analyse de la tâche

- Lire les trois affiches et interpréter les phrases « trois salades pour le prix de deux salades » et « quatre salades pour le prix de trois » selon le langage des promotions commerciales.
- Se rendre compte que chez A, 1 salade est gratuite si on en achète 3 et que, par conséquent 2 salades sont gratuites lorsqu'on en achète 6. Trouver, par additions ou multiplications le prix de 4 salades : 6 euros (1,50 + 1,50 + 1,50 + 1,50 ou 4 x 1,50 ou (1,50 + 1,50) x 2)
- Se rendre compte que chez B, il faut profiter de la promotion pour acheter 4 salades au prix de 3 salades et ensuite acheter les deux autres salade hors promotion ce qui revient à payer 5 salades : (3 x 1,20) + 1,20 + 1,20 = 6 en euros.
- Pour C, calculer le prix des 6 salades : 6 euros, par addition ou multiplication.
- Comparer les résultats obtenus et se rendre compte de l'égalité de ces résultats.
- Formuler la réponse : Il n'y a pas de marchand chez qui Marina dépensera moins que chez les autres car elle paye toujours 6 euros et la justifier par les calculs adéquats.

Ou, (éventuellement pour ceux qui cherchent à dépenser le moins possible) la réponse pourrait être complétée par « Non, mais Marina pourrait acheter 4 salades chez B pour 3,60 euros et 2 salades chez C, ce qui lui reviendrait au total à 5,60 euros »

Attribution des points

4 Solution : « Non, Marina paie toujours 6 euros avec justifications complètes » (avec ou sans la solution à 5,60 euros)

3 Solution correcte, avec justifications incomplètes (le coût de 6 euros pour chaque marchand est indiqué, mais la justification n'est pas suffisamment explicite)

ou solution correcte pour les marchands A et C (coût 6 euros) mais erreur sur le calcul du marchand B (2 fois le prix de 4 pour 3 sans se rendre compte que cela donne 8 salades ou le prix de 4 pour 3 plus sa moitié sans se rendre compte que 2 des salades n'entrent pas dans la promotion)

2 Démarche correcte pour les 3 marchands mais comportant une erreur de calcul qui conduit à une réponse erronée mais cohérente avec les calculs faits

ou solution correcte sans explication

1 Solution ne prenant pas en compte les promotions, sans erreur de calcul

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine : Suisse romande

7. LES NOMBRES DE BERNARD (Cat 4, 5, 6)

François a écrit tous les nombres de quatre chiffres dont l'écriture comporte une fois chacun des chiffres 1, 2, 3, 4. (par exemple 2431, 3124, mais pas 1443 qui a deux fois le "4").
Claire regarde les nombres de François et recopie tous ceux pour lesquels
- le 1 n'est pas le premier chiffre (celui des milliers),
- le 2 n'est pas le 2e chiffre (celui des centaines),
- le 3 n'est pas le 3e chiffre (celui des dizaines),
- le 4 n'est pas le 4e chiffre (celui des unités).

Par exemple, elle recopie 2341, ... mais pas 3124 car le 4e chiffre est 4.
Bernard observe les nombres de Claire et décide de ne recopier que ceux qui sont pairs.

Écrivez tous les nombres recopiés par Bernard.

Expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : numération, distinction entre nombre et chiffre
Combinatoire : permutations des chiffres 1, 2, 3, 4
Logique, organisation d'une recherche

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : comprendre que les nombres de François sont les plus nombreux, que ceux de Claire n'en représentent qu'une partie et que ceux de Bernard ne sont qu'une partie de ceux de Claire.
- Comprendre la combinatoire des nombres de François et les écrire de manière systématique
  (il y en a 24 = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1).
- Parmi les nombres précédents, biffer tous ceux qui ne répondent pas aux propriétés des nombres de Claire (en interprétant correctement les négations) pour retenir la liste des neuf nombres : 2143; 2341; 2413 ; 3142 ; 3412; 3421; 4123 ; 4312 ; 4321.
- Parmi les nombres précédents, choisir ceux qui sont pairs : 3142, 3412 et 4312

Ou : tenir compte simultanément des trois propriétés, ou de deux propriétés, et procéder par élimination pour n'obtenir que les nombres de Bernard ou éventuellement ceux de Claire. Il faut toutefois partir d'un inventaire systématique écrit ou non, des nombres de François pour s'assurer de ne pas oublier de nombres de Claire ou de Bernard.

Ou : considérer que les nombres de Claire ne commencent que par 2, 3 ou 4 ; que ceux de Bernard, pairs, se terminent par 2 car il faut exclure ceux se terminant par 4 selon les règles de Claire. En conclure qu'ils ne peuvent être que 3142; 3412; 4312 (le nombre 4132 ne va pas parce que le 3 ne peut pas être à la place des dizaines).

Ou : procéder sans méthode systématique et découvrir peu à peu les différents nombres, sans être certain de les avoir tous et avec le risque d'écrire plusieurs fois un même nombre.

Ou : commencer par écrire tous les nombres qui n'ont pas 1 pour chiffre des milliers et poursuivre en utilisant une des méthodes précédentes.

Attribution des points

4 Les trois nombres de Bernard (3142, 3412 et 4312) avec des explications montrant que l'inventaire a été organisé et que tous ont été trouvés (par exemple liste organisée des nombres de François, Claire et Bernard)

3 Les trois nombres de Bernard (3242, 3412 et 4312) avec des explications ne permettant pas de voir que la méthode est exhaustive
ou un seul oubli ou une seule répétition avec cependant des explications montrant une méthode efficace de recherche

2 Les trois nombres de Bernard (3242, 3412 et 4312) sans explication
ou une seule erreur avec des explications ne permettant pas de voir que la méthode est exhaustive

1 Une seule erreur, sans explication
ou deux ou trois erreurs avec une explications montrant un début de recherche cohérente

0 Plus de trois erreurs ou incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Genova

8. LE MARCHÉ AUX LIVRES (Cat. 5, 6)

Susy et Lilly ont reçu chacune 16,20 € de leurs grands parents et les mettent en commun. Elles décident d'aller au marché aux livres et DVD. Ce jour-là les offres spéciales sont :

- Un DVD au prix de 3,60 €. En achetant 3 DVD, on peut en avoir un quatrième à moitié prix.
- Un livre au prix de 2,50 €, 2 livres pour 4 €.

Avant de rentrer à la maison, Susy et Lilly doivent en outre passer payer le jeu qu'elles ont pris la semaine précédente. Ce jeu coûte 6,10 €.

Susy et Lilly ont dépensé tout l'argent reçu de leurs grands parents.

Qu'ont-elles acheté au marché ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction et multiplication
- Logique : organisation d'un raisonnement qui tient compte de plus de deux conditions

Analyse de la tâche

- Comprendre que Susy et Lilly dépensent entièrement leur argent : 32,40 (en euros).
- Établir la somme dont elles peuvent disposer pour l'achat de livres et DVD : 32,40 – 6,10 = 26,30 (en euros).
- Faire une hypothèse sur le nombre de DVD achetés et examiner si la totalité de la somme restante peut être dépensée en n'achetant que des livres ou le contraire.

Ou déterminer, de manière organisée, les achats possibles selon les offres spéciales (qu'il faut savoir interpréter correctement !).

Nb.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
DVD	3,60	7,20	10,80	12,60	16,20	19,80	23,40	24,20	27,80	-	-	-	-
livres	2,50	4	6,50	8	10,50	12	14,50	16	18,50	20	22,50	24	26,50

et se rendre compte que pour obtenir 26,30 euro (partie décimale : 30) on peut, par exemple, constater que les parties décimales des prix des DVD et des livres ne peuvent être respectivement que 80 et 50 et trouver la seule possibilité : 19,80 et 6,50, ce qui correspond à 6 DVD et 3 livres.

Ou : procéder par essais non organisés et vérifier ensuite la réponse.

Attribution des points

4 Réponse correcte (6 DVD et 3 livres) avec explication adéquate
3 Réponse correcte avec explication peu claire ou incomplète
2 Procédure correcte mais une erreur de calcul
1 Réponse erronée mais début de recherche correcte
0 Incompréhension du problème

Niveau : 5, 6

Origine : Ticino

9. NOMBRES À TROUVER (Cat. 5, 6, 7)

Julien observe le nombre 1313 et remarque que :

- lorsqu'il additionne ses quatre chiffres, il obtient 8 (1 + 3 + 1 + 3 = 8),
- lorsqu'il multiplie ses quatre chiffres, il obtient un nombre impair, (1 x 3 x 1 x 3 = 9).

Il se demande quels autres nombres de quatre chiffres ont 8 comme somme de leurs chiffres et un nombre impair comme produit de leurs chiffres.

Aidez Julien à trouver les autres nombres !

Donnez la liste de tous les nombres que vous avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique (somme, produit, parité)
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Lire les consignes et comprendre les deux conditions à partir de l'exemple, puis chercher quelques autres nombres.
- Se rendre compte que certains chiffres ne peuvent intervenir dans les nombres :
  le 0, pour son pouvoir absorbant dans la multiplication
  les chiffres pairs
  les chiffres supérieurs à 5 car la somme des 4 chiffres dépasserait 8
- Avec un 5 il y a 4 nombres qui vérifient les deux propriétés, car les 3 autres chiffres ne peuvent être que des 1. On obtient 1115, 1151, 1511, 5111.
- Avec un 3, pour faire une somme de 8, il faut un autre 3 et deux 1. On en obtient 6 qui sont 1133, 1313, 1331, 3113, 3131, 3311.

Ou : chercher les nombres possibles sans se rendre compte explicitement des restrictions précédentes et trouver les 10 nombres mais sans être certains qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Attribution des points

4 Réponse correcte (les 9 nombres : 1115, 1151, 1511, 5111, 1133, 1331, 3113, 3131, 3311 avec éventuellement 1313 déjà mentionné)

3 Solution incomplète, 7 ou 8 nouveaux nombres corrects, sans réponse incorrecte
ou les 9 nombres avec une ou deux répétitions

2 De 4 à 6 nouveaux nombres corrects, sans réponse incorrecte

1 2 ou 3 nouveaux nombres corrects (avec d'autres incorrects)

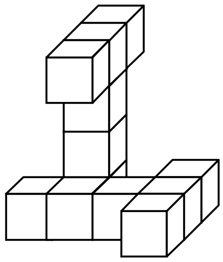
0 Un seul nouveau nombre trouvé ou incompréhension du problème

Niveau : 5, 6

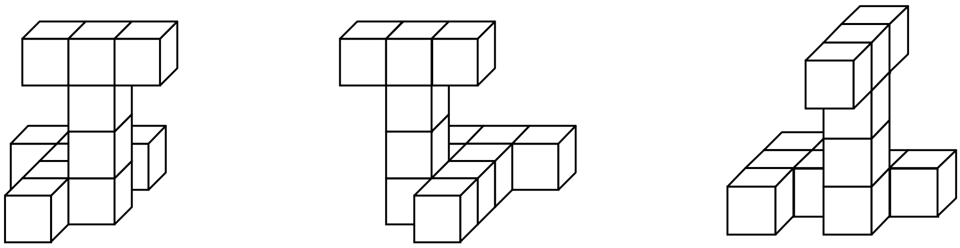
Origine : Franche-Comté

10. POINTS DE VUE (Cat. 5, 6, 7)

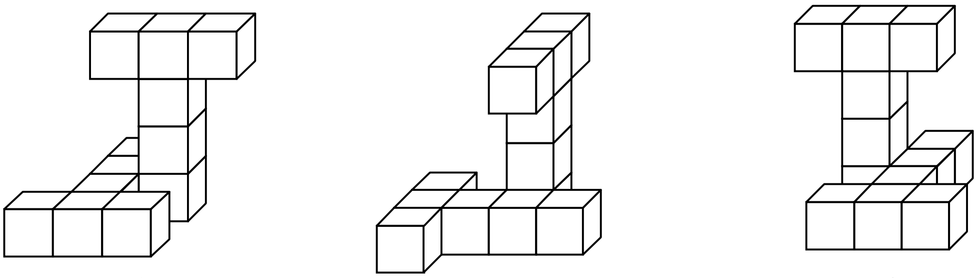
André a fait une construction en collant des cubes. Voici comment elle se présente, vue de face :



Parmi les dessins (a, b, c, d, e, f) ci-dessous, repérez ceux qui représentent la construction d'André et précisez si elle est vue de l'arrière, de la droite ou de la gauche.



a b c



d e f

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie dans l'espace : vision spatiale, « polycube », rotation d'un solide, perspective cavalière

Analyse de la tâche

- Tourner mentalement la construction d'un quart ou d'un demi-tour par rapport à l'observateur, dans le sens inverse de celui que l'observateur prendrait pour observer la construction sous un autre point de vue.
- Décomposer la construction en éléments plus simples à visualiser mentalement. En particulier le té couché et le té debout.
- Comparer l'image mentale de la construction tournée avec chaque dessin.
- Rejeter les trois dessins correspondant à une position symétrique incorrecte des deux tés : a, e et f.
- Indiquer les vues : b = vue de gauche, c = vue de derrière, d = vue de droite.

Attribution des points

4 Solution complète : les trois dessins corrects (b, c et d) et les trois points de vue identifiés et bien indiqués

3 Les trois dessins corrects mais une seule vue correctement indiquée (par exemple interversion de gauche et droite)

2 Les trois dessins corrects, sans indication des points de vue ou seulement deux dessins corrects avec les points de vue correspondants

1 Un seul dessin correct avec le point de vue correspondant ou deux dessins corrects avec échange des points de vue

0 Incompréhension du problème

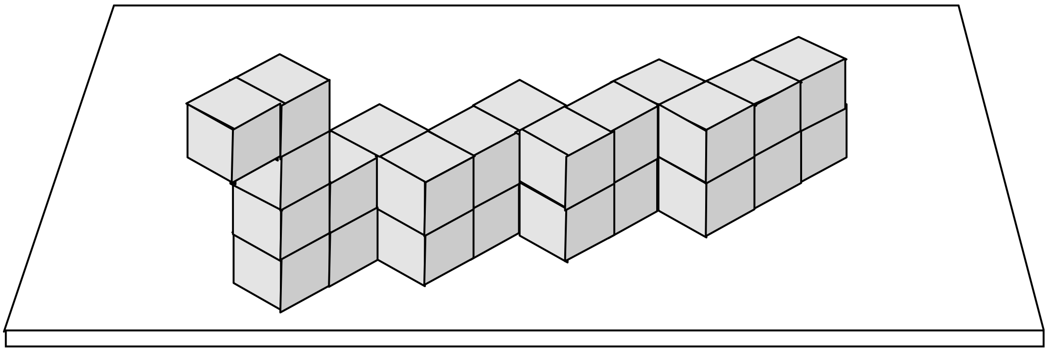
Niveau : 5, 6, 7

Origine : Franche-Comté

11. LE SERPENT DE BOIS (Cat. 6, 7, 8)

Georges s'amuse à construire des animaux en utilisant des petits cubes de bois. Il utilise des cubes tous identiques qu'il colle entre eux avec beaucoup de précision.

Aujourd'hui, avec 27 petits cubes, il a réalisé ce grand serpent qu'il a posé sur son bureau :



Pour rendre plus belle sa construction, Georges a peint en vert toute la surface du serpent qui n'est pas en contact avec le plan du bureau et a peint en jaune les faces sur lesquelles il repose.

D'après vous, combien y a-t-il de faces de cubes peintes en jaune et combien de faces peintes en vert ?

Expliquez comment vous avez fait pour les compter.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Géométrie : visualisation spatiale : cube et ses propriétés, surface d'un solide, mesure de l'aire des faces d'un solide par rapport à une unité de mesure
- Arithmétique : comptage, addition et soustraction

Analyse de la tâche

- Constater que l'on voit 24 cubes sur la figure et se rendre compte que les 3 qui manquent sont cachés, ils soutiennent les trois cubes dont on voit seulement la face supérieure.
- Comprendre que la surface du serpent est constituée de carrés qui sont des faces des cubes avec lesquels il est construit.
- Considérer que les carrés jaunes sont autant de faces des cubes qui forment la « base » du serpent, c'est-à-dire ceux qui sont appuyés directement sur le bureau. Il y en a donc 12 (9 visibles et 3 cachés).
- Pour compter les carrés verts, il suffit de considérer les carrés qui forment la surface de la partie visible non appuyée sur le bureau et ajouter ceux qui forment la surface de la partie non visible sur le dessin et qui ne sont pas en contact avec le bureau.
- On voit directement sur la figure qu'il y a 44 faces visibles.
- On compte ensuite les carrés qui ne sont pas visibles directement sur la figure (pour chaque cube, il faut « s'imaginer » les faces qui manquent) : à partir des trois premiers cubes formant la tête du serpent, on doit ajouter 6 carrés ; en procédant le long des six premiers cubes du corps, on en ajoute 8 autres. En continuant encore le long du serpent, il y en a 6 autres pour chacun des trois « segments » formés de six cubes chacun, ce qui fait qu'il faut ajouter 18 autres carrés pour le reste du serpent.
- Trouver enfin le nombre de carrés verts : 44 + 6 + 8 + 18 = 76.
- Un autre comptage est possible : considérer la surface latérale visible, comprenant 27 carrés. La face latérale non visible est aussi composée de 27 carrés. Il faut ajouter les 22 carrés constituant le dos, le cou et la tête, ce qui donne en tout 2 x 27 + 22 = 76 carrés verts.

Ou bien : remarquer que chaque cube a 6 faces et que chaque fois qu'une face d'un cube s'accole à celle d'un autre, cette face devient « interne » et ne doit plus être comptée.

- Considérer que le nombre total des faces des 27 cubes est 162 (6 x 27).
- Trouver le nombre des faces « internes » en comptant le nombre des cubes accolés et en doublant ce nombre. Par exemple, compter d'abord les cubes accolés en « horizontal » (14), ensuite en « vertical » (23) et obtenir ainsi 74 [(14 + 23) x 2].
- Obtenir enfin le nombre des carrés verts du serpent, c'est-à-dire 76, en enlevant de 162 les 74 faces « internes » et les 12 faces jaunes : 162 – 74 – 12 = 76.

Attribution des points

4 Réponse correcte (12 carrés jaunes, 76 carrés verts) avec explication complète

3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire

2 Réponse correcte sans explication,
ou réponse correcte à la première question (12) et une erreur de comptage pour la seconde, mais qui montre une procédure systématique et cohérente.

1 Réponse correcte seulement à la première question (12)

0 Incompréhension du problème

Niveau : 6, 7, 8

Origine : Siena

12. L'HORLOGE DIGITALE (Cat. 6, 7, 8)

Marco est un passionné des nombres. Il a dans sa voiture une horloge digitale à quatre chiffres qui indique l'heure de 00 : 00 à 23 : 59.

Au moment de partir pour un long déplacement, Marco observe son horloge et constate que les deux nombres indiqués, celui des minutes et celui des heures, sont des carrés de nombres entiers (qui, sur une horloge digitale, s'écrivent sous la forme : 00, 01, 04, 09, 16, 25, …).

Au retour de son voyage, Marco constate que son horloge affiche de nouveau les carrés de deux nombres entiers. Son ordinateur de bord lui indique qu'il a parcouru 352 km en 4 heures et 20 minutes.

À quelle heure Marco est-il rentré de son voyage ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

Arithmétique, mesures du temps

Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre que les nombres figurant sur l'horloge s'écrivent tous avec deux chiffres et admettre les écritures 00, 01, 02 ... comme représentants des nombres 0, 1, 2, ...
- Comprendre que pour les heures, les nombres possibles carrés parfaits sont : 0, 1, 4, 9, 16, et ceux des minutes sont 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, et que, pour pouvoir répondre à la question, il sera nécessaire de dresser l'inventaire de toutes les occurrences des affichages simultanés des deux nombres.
- Cela donne 5 x 8 = 40 affichages possibles, selon le tableau suivant :

00:00	01:00	04:00	09:00	16:00
00:01	01:01	04:01	09:01	16:01
00:04	01:04	04:04	09:04	16:04
00:09	01:09	04:09	09:09	16:09
00:16	01:16	04:16	09:16	16:16
00:25	01:25	04:25	09:25	16:25
00:36	01:36	04:36	09:36	16:36
00:49	01:49	04:49	09:49	16:49

Observer que les lignes 1, 2, 3, 4, 6 et 7 du tableau ne peuvent être retenues, car on n'obtient pas un carré en ajoutant 20 aux minutes affichées. La ligne 5 peut convenir (16 + 20 = 36), ainsi que la ligne 8 (49 + 20 = 60 + 9, soit une heure de plus et 09 minutes).

- Rechercher quelles sont les heures qui diffèrent de 4 h 20mn dans ce tableau, par estimation tout d'abord (on voit que c'est vraisemblable entre la première et la troisième colonne ou entre la troisième et la quatrième) puis en effectuant le calcul pour la 5ème et la 8ème ligne :

  en ajoutant 4 h 20 aux heures de la première colonne, on trouve 00:16 + 04:20 = **04:36** et 00:49 + 04:20 = 05:09 ; et à celles de la troisième colonne 04:16 + 04:20 = 08:36 et 04:49 + 04:20 = **09:09.**
- Formuler les deux réponses

Attribution des points

4 Les deux heures possibles de retour, 04:36 et 09:09, avec explications détaillées (tableau ou liste et traces des calculs), permettant de voir que toutes les possibilités ont été envisagées

3 Les deux heures possibles de retour : 04:36 et 09:09, sans explication permettant de voir que toutes les possibilités ont été envisagées,

ou une des deux heures possibles (04:36 probablement) avec explications, mais sans avoir envisagé l'addition « avec reste » qui permet de passer des 04 heures aux 09 heures, ou heures de départ au lieu des heures d'arrivée

2 Une des réponses possibles, avec explications peu claires

ou un raisonnement cohérent mais avec une erreur de calcul

ou inventaire complet des 40 occurrences

1 Inventaire incomplet des occurrences (au moins 20 occurrences)

0 Incompréhension du problème ou inventaire avec moins de 20 occurrences

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Genova

13. COMPOSITIONS DE ROSES (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Madame Flora, propriétaire d'un célèbre magasin de fleurs, a préparé pour un client deux très belles compositions de roses.

Dans la première composition, faite de roses blanches, rouges et jaunes, elle a utilisé 235 roses.

Dans la seconde composition, faite seulement de roses rouges et blanches, elle a utilisé 263 roses.

Madame Flora observe que :

- le nombre des roses blanches est le même dans les deux compositions ;
- dans la première composition le nombre des roses jaunes est le tiers du nombre des roses rouges ;
- dans la seconde composition le nombre des roses rouges est le double du nombre des roses rouges de la première composition.

D'après vous combien y a-t-il de roses de chaque couleur dans chacune des compositions ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

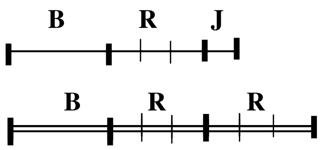
- Arithmétique : les quatre opérations
- Algèbre : introduction à l'algèbre ; équations et systèmes d'équations

Analyse de la tâche

- Considérer les deux compositions de roses (de 3 couleurs la première et de 2 couleurs la deuxième) et les relations existantes entre les nombres des roses de chaque couleur dans les deux compositions.
- Se rendre compte que la différence des nombres de roses des deux compositions ne dépend pas des roses blanches.
- Remarquer que le nombre des roses non-blanches dans les deux compositions peut s'exprimer en fonction seulement du nombre des roses jaunes : dans la première composition, le nombre des roses non-blanches est le quadruple de celui des jaunes (puisque le nombre de rouges est le triple des jaunes), alors que, dans la seconde composition, les rouges sont six fois plus nombreuses que les jaunes (puisqu'il y en a le double que dans la première composition).
- En déduire que la différence des nombres de roses des deux compositions, c'est-à-dire 28 (263 – 235), est le double (6 – 4) du nombre des roses jaunes. Il y a donc 14 roses jaunes. Ce raisonnement peut être illustré avec un schéma du type :

Première composition

Seconde composition



dont on déduit que la différence des nombres de roses dans les deux compositions est le double de celui des roses jaunes de la première composition et les deux tiers des roses rouges de la première composition.

- Conclure que dans la première composition il y a 14 roses jaunes, 42 roses rouges et 179 roses blanches, alors que dans la deuxième il y a 84 roses rouges et 179 roses blanches.

Ou : après avoir noté, par exemple, B, R et J respectivement le nombre de roses blanches, rouges et jaunes de la première composition, traduire dans un langage algébrique les relations données dans l'énoncé : B + R + J = 235, pour la première composition, B + 2R = 263, pour la seconde composition.

- Faire la différence des nombres de roses des deux compositions pour obtenir la relation R – J = 28.
- Puisque R = 3J (seconde condition donnée dans l'énoncé), en déduire que 2J = 28 d'où J = 14. En déduire que R = 42, ce qui donne B = 235 – 14 – 42 = 179, d'où la première composition : 179 blanches, 14 jaunes et 42 rouges.
- En déduire qu'il y a 2 x 42 = 84 roses rouges dans la deuxième composition et 263 – 84 = 179 roses blanches.
- Les élèves des catégories 9 et 10 pourraient résoudre le problème avec un système d'équations linéaires, par exemple en désignant par b le nombre des roses blanches dans chaque composition et par r le nombre des roses rouges dans la première, on obtient :

$$\begin{cases} b + r + \frac{1}{3}r = 235 \\ b + 2r = 263 \end{cases}$$

Attribution des points

4 Réponse correcte (première composition : 14 roses jaunes, 42 roses rouges et 179 roses blanches ; seconde composition : 84 roses rouges et 179 roses blanches) avec explications claires et complètes

3 Réponse correcte avec explications insuffisantes ou peu claires ou seulement avec une vérification

2 Réponse correcte sans explication,
ou réponse erronée due à une erreur de calcul, mais raisonnement correct

1 Début de recherche cohérente ou essais de calculs ne tenant pas compte d'une des conditions

0 Incompréhension du problème

Niveau : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : Siena

14. ANNIVERSAIRES ET BOUGIES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Luc et Claire sont frère et sœur.

Lorsque Luc est né son papa fêtait son trente sixième anniversaire, alors que quand Claire est née sa maman fêtait son trentième anniversaire.

Y a-t-il des anniversaires pour lesquels on peut utiliser les mêmes bougies pour indiquer sur le même gâteau l'âge de Luc et celui de son père en les changeant simplement de place ?

Et pour Claire et sa maman ?

Justifiez vos réponses et indiquez tous les anniversaires pour lesquels il est possible d'utiliser les mêmes bougies sur le même gâteau.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : nombres et numération, écriture polynomiale des nombres en base 10
- Algèbre : équations à deux inconnues dans N
- Logique : démonstration

Analyse de la tâche

- Comprendre que la différence d'âges entre Luc et son papa est de 36 ans et reste constante. De même, la différence d'âges entre Claire et sa maman est toujours de 30 ans.
- Déduire de l'écriture décimale de position d'un nombre à deux chiffres, que la différence entre ce nombre et le nombre obtenu en échangeant les chiffres des dizaines et des unité, est un multiple de 9. En effet, on écrit un nombre à deux chiffres **xy** sous la forme polynomiale 10x+y, alors que le nombre **yx** obtenu en échangeant les chiffres des dizaines et des unité s'écrit 10y+x, et la différence des deux est : **xy** – **yx** = 10x+y – (10y+x) = 9x – 9y = 9(x – y).
- Conclure qu'il est possible d'utiliser les mêmes bougies pour écrire les anniversaires de Luc et de son papa puisque la différence de leurs âges est 36 qui est un multiple de 9. Conclure aussi que cela n'est pas possible pour Claire et sa maman, car 30 n'est pas un multiple de 9.
- Remarquer que l'échange des bougies x et y avec y et x n'est possible que si la différence x – y est 4, car la différence d'âges entre Luc et son papa est de 36 ans.
- Écrire toutes les possibilités pour les âges de Luc et son père, en éliminant l'éventualité 04 et 40 parce que, d'habitude on n'écrit pas sur un gâteau d'anniversaire un âge commençant par 0.
- Luc 15 26 37 48 59
  Papa 51 62 73 84 95
- Noter que les anniversaires fêtés avec les mêmes bougies se répètent tous les 11 ans, puisque l'on doit conserver une différence de 4 entre les chiffres tout en augmentant les chiffres des unités et des dizaines d'une unité, ce qui fait augmenter les âges de 11 ans.

Ou : procéder par essais successifs à partir de 36 ans pour le papa et 0 pour Luc. On obtient ainsi la première solution possible 51 et 15 et les suivantes en remarquant que l'on doit ajouter 11 pour passer d'une solution à la suivante en augmentant les chiffres des unités et des dizaines d'une unité, tout en conservant la différence d'âges de 36 ans entre Luc et son papa.

- Faire de même pour Claire et sa maman à partir de 0 et 30 en se rendant compte que les chiffres des unités sont les mêmes et que les chiffres des dizaines ont toujours une différence de 3 (différence d'âges de 30 ans), et constater qu'il n'y a pas de solution.
- Ou bien : poser l'équation 10x + y = 10y + x + 36 d'où l'on tire y = x – 4. Observer que l'on ne peut pas attribuer de valeur à x pour laquelle y serait négatif et que les valeurs obtenues doivent être des entiers naturels. Pour trouver les solutions, donner toutes les valeurs possibles à x.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Pour Luc-papa : 15-51; 26-62; 37-73; 48-84; 59-95, avec éventuellement la réponse 04-40 ; pas de solution pour Claire-maman) avec explications (démonstration ou étude systématique)

3 Réponse correcte avec explications peu claires pour les deux couples
ou une seule réponse pour Luc-papa et l'impossibilité pour Claire-maman à partir de deux ou trois essais

2 Réponse correcte sans explication pour Luc-Papa et l'impossibilité pour Claire-maman, sans explication ou avec un seul essai

1 Début de recherche cohérente ou une liste incomplète (au moins deux possibilités) pour le couple Luc-Papa

0 Incompréhension du problème

Niveau : 7, 8, 9,10

Origine: Siena

15. FRACTIONS SUPERPOSÉES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Joël et Line ont disposé chacun neuf nombres sur trois lignes et trois colonnes et ont tracé six barres de fractions entre deux nombres superposés, et pouvant ainsi lire 6 fractions :

Voici les nombres de Joël:

2	4	6
8	12	9
10	16	18

Voici ceux de Line:

4	3	2
8	6	9
14	16	15

Pour choisir leurs nombres, ils devaient respecter les règles suivantes :

a) les neuf nombres sont des nombres entiers positifs tous différents,

b) chacune des six fractions qu'on peut lire représente un nombre plus petit que 1,

c) aucune des six fractions ainsi formées n'est irréductible,

d) toutes les fractions représentent des nombres différents.

En outre, Joël et Line ont choisi leurs neuf nombres de manière à ce que le plus grand d'entre eux soit le plus petit possible.

Line est satisfaite car son plus grand nombre (16) est plus petit que le plus grand des nombres de Joël (18).

Mais Joël lui fait observer qu'elle n'a pas respecté la règle d) car 4/8 = 3/6, ni la règle c) vu que 2/9 est irréductible.

Choisissez aussi neuf nombres entiers en respectant les quatre règles a, b, c, d, comme Joël, mais dont le plus grand soit plus petit que 18 et le plus petit possible.

Écrivez votre meilleur choix.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : fractions, simplification, fractions équivalentes, nombres premiers entre eux

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'on ne peut choisir 1 (sinon la fraction serait irréductible), que deux nombres superposés doivent avoir un diviseur commun, que les nombres d'une colonne sont ordonnés du plus petit au plus grand.
- Au cours des essais remarquer qu'il faut choisir des petits nombres dans la première ligne, qu'il est avantageux de noter les fractions simplifiées pour éviter les fractions équivalentes, que si on choisit des nombres pairs uniquement, on est certain que toutes les fractions se simplifieront mais on ne descendra pas au dessous de 9 x 2 = 18, etc.
- Partir de 2, faire la liste des nombres qui peuvent encore être utilisés : 3, 4 (pas 5) 6, (pas 7), 8, 9 (sous le 6), 10, (pas 11) 12 , (pas 13) et 14.

Ou : partir d'une hypothèse sur le plus grand nombre (par exemple 16) et chercher les autres en suivant les règles. Essayer ensuite avec 15 et 14 et se rendre compte enfin qu'avec 12 il n'y a pas de solutions.

Voici quelques solutions, dont les deux premières ne sont pas optimales :

4	3	2
8	6	9
14	16	15

2	4	3
10	8	9
15	14	12

2	3	4
8	6	12
10	9	14

2	3	4
6	12	8
9	14	10

2	3	4
8	9	6
14	12	10

2	3	4
8	9	6
10	12	14

2	3	8
4	9	10
6	12	14

Attribution des points

4 Réponse correcte : disposition correcte et optimale de 9 nombres entiers positifs dont 14 est le plus grand (et le plus petit possible)

3 Réponse : disposition non optimale de 9 nombres entiers positifs dont 15 est le plus grand

2 Réponse : disposition non optimale de 9 nombres entiers positifs dont 16 est le plus grand
ou solution avec 14 ou 15 comme plus grand nombre utilisé, mais avec une « infraction » aux règles

1 Réponse avec 14, 15 ou 16 comme plus grand nombre utilisé, mais avec deux ou trois « infractions »

0 Incompréhension du problème, ...

Niveau : 7, 8, 9, 10

Origine : Israël

16. CUBES CACHÉS (Cat 8, 9, 10)

Julie a 86 cubes blancs et 34 noirs, tous de mêmes dimensions. Avec tous ses cubes, elle construit un parallélépipède rectangle.

Comme elle trouve que les cubes noirs ne sont pas beaux, elle les place de telle sorte qu'on ne puisse pas les voir quand le parallélépipède est posé sur son bureau en bois.

Quelles peuvent être les dimensions des parallélépipèdes que Julie peut construire en utilisant tous ses cubes.

Trouvez toutes les possibilités.

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, décomposition d'un nombre en produits de facteurs
- Géométrie : parallélépipède rectangle, volume et faces latérales

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé, comprendre que le parallélépipède doit être composé de 120 (86 + 34) cubes et qu'il peut avoir plusieurs dimensions possibles (triplets de nombres naturels dont le produit est 120) : 1×1×120 ; 1×2×60 ; ...
- Comprendre que le parallélépipède est posé sur sa base dont les cubes « intérieurs » ne sont pas visibles, ce qui n'est pas le cas pour la face supérieure et pour les faces latérales.
- Comprendre que le nombre des cubes invisibles doit être supérieur ou égal à 34 et dépend de la face que l'on pose sur le bureau. Il dépend donc du nombre de cubes en hauteur du parallélépipède.
- Se rendre compte que, si l'ont veut « cacher » les cubes noirs, le parallélépipède doit avoir au moins 2 cubes de hauteur et 3 cubes dans les deux autres dimensions.
- Dresser un inventaire complet des parallélépipèdes possibles et calculer pour chacun le nombre des cubes invisibles en fonction de la hauteur choisie.

Dimensions possibles du parallélépipède	hauteur	Dimensions du parallélépipède invisible	nombre des cubes invisibles
2 ×3 × 20	2	1 × 1 × 18	18
2 × 4 × 15	2	1 × 2 × 13	26
2 × 5 × 12	2	1 × 3 × 10	30
2 × 6 × 10	2	1 × 4 × 8	32
3 × 4 × 10	3	2 × 2 × 8	32
3 × 4 × 10	4	1 × 3 × 8	24
3 × 4 × 10	10	1 × 2 × 9	18
3 × 5 × 8	**3**	**2 × 3 × 6**	**36**
3 × 5 × 8	5	1 × 4 × 6	24
3 × 5 × 8	8	1 × 3 × 7	21
4 × 5 × 6	**4**	**3 × 3 × 4**	**36**
4 × 5 × 6	5	2 × 4 × 4	32
4 × 5 × 6	6	2 × 3 × 5	30

- Constater qu'il n'y a que deux dispositions qui permettent de cacher tous les cubes noirs :
  - le parallélépipède de 3 cubes de hauteur, 5 et 8 dans les deux autres dimensions,
  - le parallélépipède de 4 cubes de hauteur, 5 et 6 dans les deux autres dimensions.

Attribution des points

4 Les deux solutions correctes : 3 (hauteur) × 5 × 8 et 4 (hauteur) × 5 × 6, avec des explications claires qui montrent l'étude de tous les cas

3 Les deux solutions correctes avec des explications incomplètes

2 Les deux solutions correctes sans explication

ou une seule des deux solutions avec explications claires avec au maximum deux triplets erronés

1 Une solution correcte sans explications ou les deux solutions sans indiquer la hauteur ou début de recherche pertinente

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : CI

17. TREIZE À TABLE (Cat. 8, 9, 10)

Au restaurant, c'est la fin d'un repas entre amis. Le garçon apporte l'addition : 192,75 €. Les treize amis qui ont mangé ensemble décident de partager équitablement les frais.

Julie fait la division sur la calculatrice de son téléphone portable et dit :

« Ça fait 14,82692308. Je propose que chacun mette 15 euros sur la table.

Mathieu, qui sait encore faire des divisions par écrit, griffonne sur un coin de la nappe de papier et dit à Julie :

« Ta calculatrice n'est pas très précise car je trouve 14,82692307, et je n'ai pas fini ».

Antoine, qui est très rapide dans les divisions, dit :

« Mathieu a raison, le 8^e chiffre après la virgule est bien 7, et je peux même vous dire, par exemple, quel serait le 2008^e chiffre après la virgule !

Et vous aussi, dites quel est le 2008^e chiffre après la virgule.

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : nombres rationnels, développement décimal

Tâche de l'élève

- S'approprier la situation de division et vérifier les affirmations de Julie, Mathieu et Antoine.
- Observer le développement décimal de la division 192,75 : 13 sur une ou plusieurs calculatrices différentes et constater qu'il peut y avoir des différences pour les derniers chiffres affichés et qu'on entrevoit un début de régularité.
- Effectuer la division 192,75 : 13 par écrit et constater que les « restes » successifs sont : 62,75 en dizaines ; 10,75 en unités ; 35 en dixièmes ; 9 en centièmes, puis 2 ; 3 ; 0 ; 7 ; 6 ; 9 ; 2 ; ... et remarquer que ces restes se répètent régulièrement dès le troisième chiffre après la virgule. Ils conduisent à la période 692307 dans le quotient : 14,82**692307**692307**692307**...
- Constater que la période commence au 3^e chiffre après la virgule (celui des millièmes) et qu'elle est de 6 chiffres. Diviser par conséquent 2008 – 2 = 2006 (car le développement périodique commence au 3^e chiffre) par 6 (nombre de chiffres de la période) ce qui donne un reste de 2. Ce reste correspond au deuxième chiffre de la période,, qui est 9.Le 2008^e chiffre du développement décimal est donc 9.

Ou observer que les décimales de rang $3 + 6n = 2 + 1 + 6n$ sont toutes 6, début de la période. Celles de rang $4 + 6n = 2 + 2 + 6n$ sont toutes des 9, le second chiffre de la période. Celles de rang $2 + 3 + 6n$ sont toutes 2, troisième chiffre de la période et ainsi de suite. Donc pour trouver la décimale de rang $2008 = 2 + r + 6n$, il suffira de trouver le reste r de la division de 2008 –2 = 2006 par 6. 2006 : 6 donne le reste 2 et le second chiffre de la période, 9, sera la 2008^e décimale.

Ou, par exemple, en additionnant des multiples de 6 pour s'approcher de 2008, on peut trouver : 3 + 1800 + 180 + 24 = 2007. La 2007^e décimale sera 6, la 2008^e sera 9.

Attribution des points

4 La réponse exacte (le 2008^e chiffre après la virgule est 9) avec une explication mettant en évidence la période et les moyens de l'utiliser pour déterminer la décimale.

3 La réponse exacte, avec des explications peu claires.

2 La réponse exacte, sans explication
ou une erreur sur la décimale avec des explications cohérentes (découverte et utilisation de la période, mais imprécision dans la position du 2008^e chiffre).

1 La période est découverte, mais elle n'est pas utilisée pour déterminer la 2008^e décimale.

0 Incompréhension du problème.

Niveaux: 8, 9, 10

Origine: C. I.

18. UN SATELLITE AU-DESSUS DE L'ÉQUATEUR (Cat. 9, 10)

L'équateur terrestre mesure environ 40 000 km, à 5 km près. (C'est-à-dire que sa mesure est comprise entre 39 995 km et 40 005 km). Un satellite artificiel fait le tour de la terre en survolant l'équateur à une altitude précise de 200 km en 2 heures exactement.

Trois chercheurs, Nicolas, Christophe et Georges, ont calculé la distance parcourue par le satellite et sa vitesse quand il effectue un tour complet. Ils ont obtenu les résultats suivants:

Nicolas : distance : 41 230 km, vitesse : 20 620 km/h

Christophe : distance : 41 256 km, vitesse : 20 627 km/h

Georges : distance : 41 258 km, vitesse : 20 635 km/h

Lesquelles de ces mesures sont-elles correctes, c'est-à-dire compatibles avec l'approximation sur la mesure de l'équateur ?

Justifiez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Calculs numériques : opérations avec π et approximations
- Géométrie : longueur de la circonférence
- Grandeurs : espace, temps, vitesse, unités de mesure

Analyse de la tâche

- Comprendre que la mesure de l'équateur donnée n'est pas exacte mais est donnée par un intervalle l'encadrant.
- Connaître la formule donnant la circonférence d'un cercle de rayon R : $2\pi R$. Prendre une approximation pour π (3,14 sera suffisant).
- Calculer le rayon R de la terre compte tenu de l'approximation donnée. Il est compris entre: 39 995 : $2\pi \cong$ 6 369 km et 40 005 : $2\pi \cong$ 6 370 km (on obtient des valeurs différentes si on utilise une autre approximation pour π).
- Remarquer que le satellite décrit un cercle de rayon R + 200.
- En déduire que la distance parcourue par le satellite en un tour est comprise entre 6 569 x $2\pi \cong$ 41 253 km et 6 570 x $2\pi \cong$ 41 260 km.
- Calculer la vitesse du satellite en divisant la distance parcourue par le temps. Elle est comprise entre 20 626 km/h et 20 630 km/h.

Ou: Comprendre que le satellite parcourt 2π x 200 km de plus que la longueur de l'équateur, soit 1 256 km (ou 1 257 en prenant 3,1416 pour π).

- En déduire que la distance parcourue par le satellite est comprise entre : 41 251 km et 41 261 km (ou 41 252 km et 41 262 km avec la valeur plus précise de π).
- Calculer sa vitesse et en déduire qu'elle est comprise entre 20 625,5 km/h et 20 630,5 km/h (ou 20 626 km/h et 20 631 km/h avec la valeur plus précise de π).
- Conclure que les Christophe et Georges ont calculé correctement la distance parcourue par le satellite et que seul Christophe a calculé correctement sa vitesse.

Pour faciliter la correction voir le tableau suivant :

Approximation de π	400π	Distance min	Distance max	Vitesse min	Vitesse max
3	1200	41195	41205	20597,5	20602,5
3,1	1240	41235	41245	20617,5	20622,5
3,14	1256	41251	41261	20625,5	20630,5
3,142	1257	41252	41262	20626	20631
3,1416	1257	41252	41262	20626	20631

Attribution des points

4 Réponse correcte (les trois résultats corrects de Christophe et Georges pour la distance et seulement de Christophe pour la vitesse), avec les justifications à propos des intervalles.

3 Réponse correcte mais avec des justifications incomplètes.

2 Réponse correcte sans justification
ou réponse incorrecte à cause d'une erreur de calcul

ou deux réponses correctes sur trois avec explications

1 Début de résolution correcte (recherche des intervalles).

0 Incompréhension du problème

Niveau : 9, 10

Origine : Franche-Comté

19. GAGNANTS ET PERDANTS (Cat 9, 10)

Albert, Bernard et Charles jouent aux billes.

À la fin de chaque partie, le perdant doit donner au gagnant un nombre de billes égal au nombre de billes que le gagnant possède déjà. Le troisième joueur ne gagne et ne perd rien.

- À la première partie, c'est Albert qui gagne et Charles qui perd.
- À la deuxième partie, c'est Bernard qui gagne et Albert qui perd.
- À la troisième partie, c'est Charles qui gagne et Bernard qui perd.

Après ces trois parties, chacun des joueurs a 16 billes dans son sac.

Combien chacun avait-il de billes avant la première partie ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations élémentaires (additions et soustractions) avec des nombres entiers inférieurs à 50
- Logique : raisonnement par analyse
- Algèbre : équations et systèmes

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de répartition (pour chaque partie, le nombre de billes du gagnant double et le nombre de billes du perdant diminue du nombre de billes que le gagnant avait avant la partie) et comprendre qu'il y a 48 billes en tout.
- Faire quelques parties hypothétiques et découvrir ainsi quelques relations entre les nombres de billes de chaque joueur. Par exemple,

  ... le nombre de billes de Charles doit être 8 avant la troisième partie, et 8 avant la deuxième,

  ... que Charles doit avoir plus de billes qu'Albert avant la première partie, ...

  et procéder ainsi par essais successifs pour trouver une configuration de départ qui aboutit à 16 billes pour chaque joueur après la troisième partie (sans savoir si cette configuration est unique).

Ou : reconstituer les avoirs de chacun à partir de la fin de la troisième partie, quand chaque joueur possède 16 billes. Par exemple de la manière suivante, en indiquant les états et les échanges pour chaque partie :

	fin 3e	échanges 3e	fin 2e	échanges 2e	fin 1e	échanges 1e	début
Albert	16	0	16	**-12**	28	**+14**	14
Bernard	16	**- 8**	24	**+12**	12	0	12
Charles	16	**+ 8**	8	0	8	**- 14**	22

Ou, algébriquement, reconstituer les échanges à partir d'une situation initiale (a ; b ; c) :

après la première partie : (2a ; b ; c – a) ; après la deuxième partie : (2a – b ; 2b : c – a)

après la troisième partie : (2a – b = 16 ; 2b – c – a = 16 ; 2(c – a) = 16) et résoudre le système d'équations.

Attribution des points

4 La réponse complète et correcte (A : 14, B : 12 et C : 22) avec explications montrant qu'elle est unique

3 La réponse complète et correcte (A : 14, B : 12 et C : 22), avec explications incomplètes ou trouvée par essais sans montrer l'unicité

2 La réponse complète et correcte (A : 14, B : 12 et C : 22) sans explication
ou une seule attribution correcte avec explications et calculs cohérents

1 Début de recherche avec au moins un essai bien conduit respectant les règles du jeu

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : CI