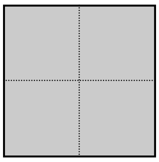
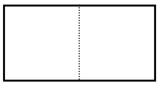
Nº titre	3	4	5	6	7	8	9	10	Ar.	Alg.	Ge.	Lo.	Orig.
1. Le jeu de Mathieu	3										x		LU
2. Casquettes et maillots	3	4							x			x	GP
3. Les figures de Charlie	3	4									x		SI
4. Les blasons (I)	3	4									x	x	RZ
5. Qui dit mieux ?	3	4	5						x				LY
6. Triangle magique		4	5						x			x	GP
7. La librairie		4	5	6					x		x		SI
8. Les blasons (II)			5	6							x	x	RZ
9. La machine à frites			5	6	7				x				SI
10. Le festival de rock			5	6	7				x	x		x	LU
11. L'étoile et les dominos			5	6	7	8					x		GP
12. Le mot de passe				6	7	8			x			x	UD
13. Montée au refuge				6	7	8	9	10	x				PR
14. Le manteau de Martin					7	8	9	10			x		TI+FJ
15. Des prix qui montent					7	8	9	10	x	x			PR
16. Étoile de Noël						8	9	10	x		x		FC
17. Jeu d'encastrement						8	9	10			x		FC
18. Retard à l'allumage							9	10	x		x		FC
19. Plates-bandes							9	10	x	x	x		PR

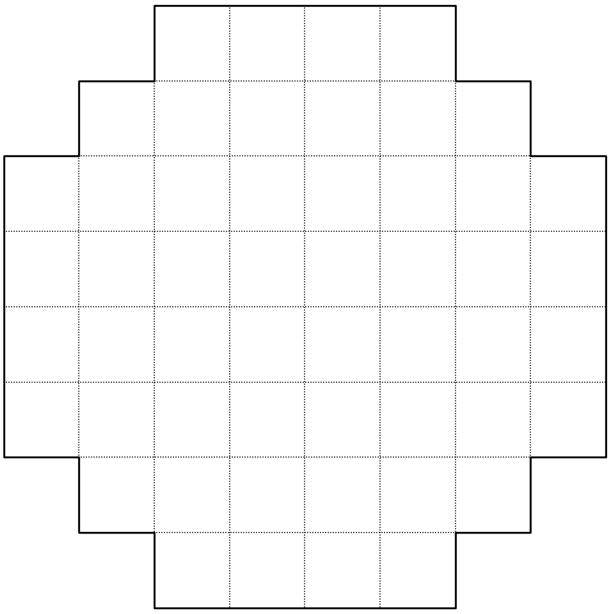
1. LE JEU DE MATHIEU (Cat. 3)

Mathieu a reçu un jeu constitué d'un plateau quadrillé et de plaques de trois formes différentes.


Forme A


Forme B


Forme C


Plateau quadrillé

Le jeu consiste à recouvrir entièrement le plateau avec le moins possible de plaques, sans laisser de case vide et sans que deux plaques se chevauchent.

Faites un pavage du plateau en utilisant le moins possible de plaques et dessinez ou collez votre solution.

Combien de plaques de chaque type avez-vous utilisé ?

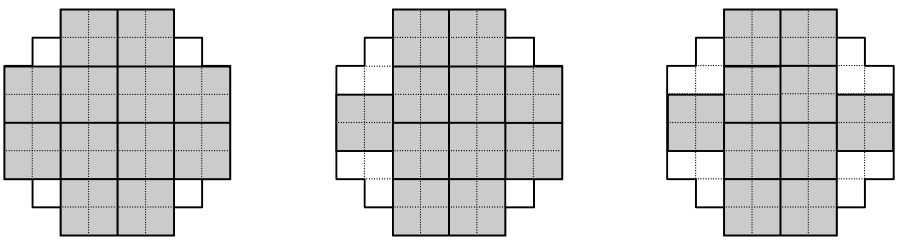
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

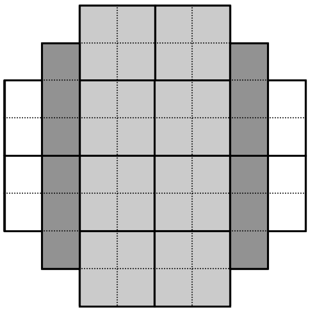
- Géométrie : notions d'aire et pavages

Analyse de la tâche

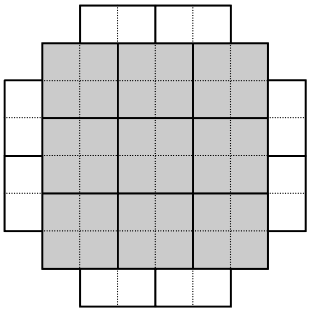
- Commencer le pavage avec des plaques A, en pensant à l'argument intuitif (pas toujours correct, car il faut ensuite combiner deux autres sortes de plaques) « plus on utilise de grandes plaques, moins il y aura de plaques au total ». Placer des plaques A en pensant qu'il faudra ensuite compléter avec seulement des plaques B et C. Ces dispositions - avec 12, 11 ou 10 plaques A - par exemple, sont impossibles :



- Voir qu'il y a deux dispositions possibles (avec 8 ou 9 plaques A) qui peuvent être complétées avec des plaques B et C.
- Chercher comment compléter chacune d'elles avec des plaques B et C et se rendre compte, encore ici, que la configuration qui utilise le plus de « grandes » plaques (A) n'est pas la plus « économique » pour le nombre total de plaques car elle exige beaucoup de « petites » C.



8A, 4B, 4C total **16** plaques



9A, 8C total **17** plaques

Ou : par d'autres essais, arriver à une dispositions avec seulement 16 plaques.

Ou : découper plusieurs exemplaires de chacune des pièces et travailler par manipulations.

Attribution des points

4 Réponse correcte (16 plaques : 8A et 4B et 4C) avec un dessin précis ou un collage d'une solution optimale.

3 Réponse correcte (16 plaques) avec un dessin ou un collage, mais sans le détail des plaques

2 Réponse non optimale avec 17 plaques bien dessinées

1 Réponse non optimale avec un dessin de 18 à 20 plaques
ou réponse 16 ou 17 plaques, sans dessin ni indications de la disposition des plaques

0 Incompréhension du problème.

Niveau : 3

Origine : Luxembourg

2. CASQUETTES ET MAILLOTS (Cat. 3, 4)

90 enfants ont participé au Cross de Transalpie.
Chaque enfant a reçu une casquette et un maillot qui portent le même numéro, de 1 à 90.

Les casquettes étaient de 5 couleurs : rouge, bleu, jaune, vert et orange. Elles étaient numérotées de la façon suivante :
1 rouge ; 2 bleu ; 3 jaune ; 4 vert ; 5 orange ; puis en reprenant les couleurs toujours dans le même ordre : 6 rouge ; 7 bleu ; 8 jaune ; 9 vert ; 10 orange ; 11 rouge ; 12 bleu ; ...

Les maillots étaient de 4 couleurs : rouge, bleu, jaune et orange. Ils étaient numérotés de la façon suivante :
1 rouge ; 2 bleu ; 3 jaune ; 4 orange ; puis en reprenant les couleurs toujours dans le même ordre : 5 rouge ; 6 bleu ; 7 jaune ; 8 orange ; 9 rouge ; 10 bleu ; ...

Ainsi, par exemple :
- le concurrent numéro 1 avait une casquette et un maillot de même couleur, rouge ;
- le concurrent numéro 2 avait aussi une casquette et un maillot de même couleur, bleu ;
- le concurrent numéro 4 avait une casquette verte et un maillot d'une couleur différente, orange.

Combien de concurrents avaient une casquette et un maillot de la même couleur ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : suites régulières, multiples, périodicité
Logique : gestion de plusieurs contraintes simultanées

Analyse de la tâche

- Lecture de l'énoncé et compréhension que chaque concurrent a un numéro de 1 à 90 et que les casquettes et les maillots sont aussi numérotés de 1 à 90 mais que les couleurs ne sont pas toujours les mêmes.
- Associer un à un les numéros des casquettes, puis des maillots en suivant les correspondances de l'énoncé sur les numéros suivants avec la répétition r, v, j, v, o pour les premières, r, v, j o, pour les secondes ; une disposition facilitant la résolution du problème est de noter en parallèle les deux séries, en colonne ou en ligne, comme ci-dessous (en utilisant éventuellement des couleurs) :

numéros	**1**	**2**	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	**20**	**21**	**22**	**23**	24	25	...
casquettes	**r**	**b**	**j**	v	o	r	b	j	v	o	r	b	j	v	o	r	b	j	v	**o**	**r**	**b**	**j**	v	o	
maillots	**r**	**b**	**j**	o	r	b	j	o	r	b	j	o	r	b	j	o	r	b	j	**o**	**r**	**b**	**j**	o	r	

- observer les couples (casquettes ; maillots) de mêmes couleurs et constater qu'on les trouve aux numéros 1, 2, 3 puis aux numéros 20, 21, 22, 23, ... et continuer le tableau jusqu'à 90, (opération fastidieuse avec des risques d'oublis ou d'erreurs de comptage)

Ou : découvrir qu'il y a une périodicité et que le prochain couple de même couleur se retrouvera pour les numéros 40, 41, 42 et 43, puis 60, 61, 62, 63, avec une périodicité de 20, et enfin 80, 81, 82, 83 et se limiter à compter ces coïncidences : 3 + 4 + 4 + 4 + 4 = 19

Ou : observer comment se succèdent les numéros pour une couleur donnée, par exemple pour la couleur rouge :
casquette rouge: **1** (→+5) 6 (→+5) 11 (→+5) 16 (→+5) **21** (→+5) 26……
maillot rouge : **1** (→+4) 5 (→+4) 9 (→+4) 13 (→+4) 17 (→+4) **21**(→+4) 25……
et trouver que les numéros 1, 21, 41, 61, 81 correspondent à deux éléments rouges. Procéder ainsi avec les autres couleurs : les casquettes et maillots numérotés 2, 22, 42, 62, 82 sont bleus ; les casquettes et maillots numérotés 3, 23, 43, 63, 83 sont jaunes et les casquettes et maillots numérotés 20, 40, 60, 80, sont orange. Conclure qu'il y a 19 participants qui ont des casquettes et des maillots de la même couleur.

Attribution des points

4 la réponse juste (19) avec une démarche bien expliquée (tableau, schéma, liste…)

3 la réponse juste (19) mais avec des explications confuses

ou réponse 18 ou 20 avec une démarche bien expliquée mais une erreur de comptage en cas de liste complète des associations

2 la réponse juste (19) sans explication

ou la réponse 18 ou 20 avec explications confuses

ou une réponse 17, 18, 21, 22 due à une erreur de comptage dans la liste complète

1 compréhension de la consigne et découverte d'un ou plusieurs numéros différents de 1, 2, 3 donnés dans l'énoncé ou réponse 18 ou 20 sans explication.

0 incompréhension du problème

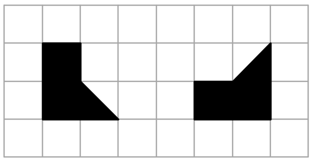
Niveaux : 3, 4

Origine : C.I. préparation de la finale internationale de Brigue

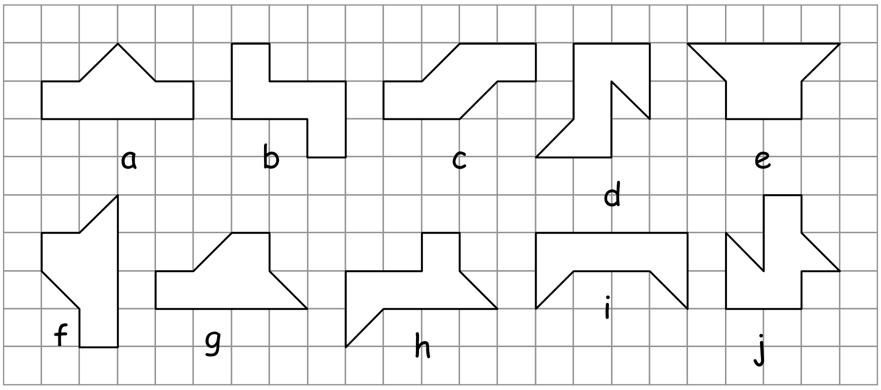
3. LES FIGURES DE CHARLIE (Cat. 3, 4)

Charlie dispose de deux formes identiques découpées dans du carton. Chaque forme est de couleur noire sur une face et rouge sur l'autre face.

On voit le dessin de ces deux formes sur le quadrillage ci-dessous, avec leur face noire visible.



Charlie s'amuse à rapprocher ses deux formes découpées et il obtient toutes les figures ci-dessous :



Lorsqu'elles sont recouvertes par les deux formes, certaines de ces figures sont :

- soit entièrement noires,
- soit entièrement rouges,
- soit en partie rouge et en partie noire

Pour chacune des figures ci-dessus, dites si elle est entièrement de la même couleur (rouge ou noire) ou en partie noire et en partie rouge.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances:

- Géométrie: isométrie (translations, rotations, et retournements); décomposition et recomposition de figures

Analyse de la tâche:

- Comprendre que pour obtenir une figure entièrement noire, il ne faut retourner aucune des deux formes, pour obtenir une figure entièrement rouge, il faut retourner les deux formes et pour obtenir une figure à la fois noire et rouge, il faut retourner une des deux formes.
- Découper les deux formes, les colorier en suivant les indications et essayer de les disposer sur chaque figure.

Ou : observer les figures de Charlie, distinguer à l'intérieur de chaque figure la position des deux formes, et vérifier si elles sont obtenues ou non par retournement.

- Identifier ainsi que les figures entièrement noires (obtenues donc par le rapprochement sans retournement des deux formes) sont: b, c, f, g, h, que d est la seule figure entièrement rouge et que les autres sont à la fois noire et rouge.

Attribution des points:

4 Les 10 figures indiquées correctement (5 figures noires : b, c, f, g, h ; 1 figure rouge : d ; 4 figures à la fois noires et rouges : a, e, i, j)

3 Neuf réponses correctes

2 Sept ou huit réponses correctes

1 Cinq ou six réponses correctes

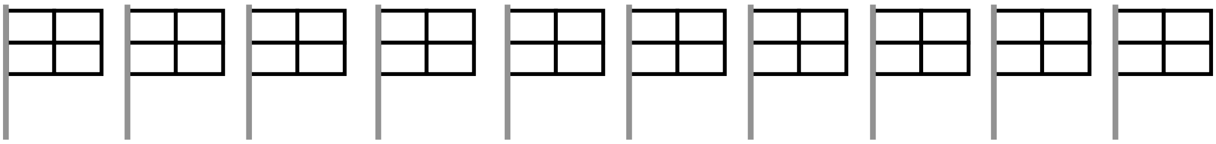
0 Moins de cinq réponses correctes ou incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Siena

4. LES BLASONS (I) (Cat. 3, 4)

Voici 10 modèles de blasons composés chacun de quatre rectangles à colorier. Ils seront ensuite affichés sur les portes des 10 classes d'une école.



Les élèves décident de colorier le blason de chaque classe de cette façon :

- chacun des quatre rectangles doit être colorié d'une même couleur : soit en rouge, soit en bleu, soit en jaune ;
- il ne doit pas y avoir plus de deux couleurs pour un même blason ;
- des rectangles qui ont un côté en commun doivent être de couleurs différentes.

Chacune des dix classes pourra-t-elle avoir un blason différent de celui des autres classes, en respectant ces règles de coloriage ?

Combien y a-t-il de blasons différents ? Montrez comment vous les avez coloriés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique, combinatoire
- Géométrie: disposition spatiale

Analyse de la tâche

- Comprendre toutes les contraintes (pas de rectangle non colorié, trois couleurs à disposition, pas plus de deux par blason, une par rectangle, contiguïté, coloriages différents) et en déduire notamment que pour chaque blason on doit avoir exactement 2 couleurs (une seule couleur donnerait des rectangles contigus de même couleur) et que deux rectangles de même couleur ont un sommet commun.
- Comprendre que, avec deux couleurs par blason et des rectangles sans côtés communs, il n'est pas possible d'avoir une répartition « trois rectangles d'une couleur et un rectangle de la seconde couleur », mais que les répartitions sont obligatoirement « deux rectangles d'une couleur, et deux rectangles de la seconde couleur dans une disposition en damier »
- Identifier les trois couples possibles de deux couleurs: rouge-bleu, rouge-jaune, jaune-bleu et constater que pour chaque couple il y a deux dispositions et obtenir les 6 (3 × 2) possibilités.
- Dessiner tous les blasons possibles :

R	B
B	R

B	R
R	B

B	J
J	B

J	B
B	J

J	R
R	J

R	J
J	R

et donner la réponse : il n'est pas possible d'avoir 10 blasons différents pour les 10 classes, mais seulement 6.

Ou : procéder de façon aléatoire, avec le risque d'oublier des blasons.

Attribution des points:

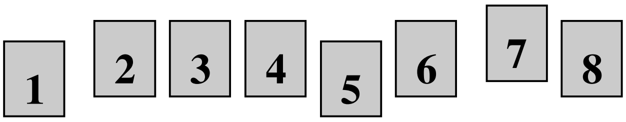
4 Réponse correcte (non, il n'y a que six blasons possibles, avec tous les dessins correctement coloriés)
3 Cinq blasons corrects différents (avec tous les dessins correctement coloriés), avec ou sans répétition
2 Quatre blasons corrects différents (avec tous les dessins correctement coloriés), avec ou sans répétition
1 Deux ou trois blasons différents correctement dessinés, avec ou sans répétition
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

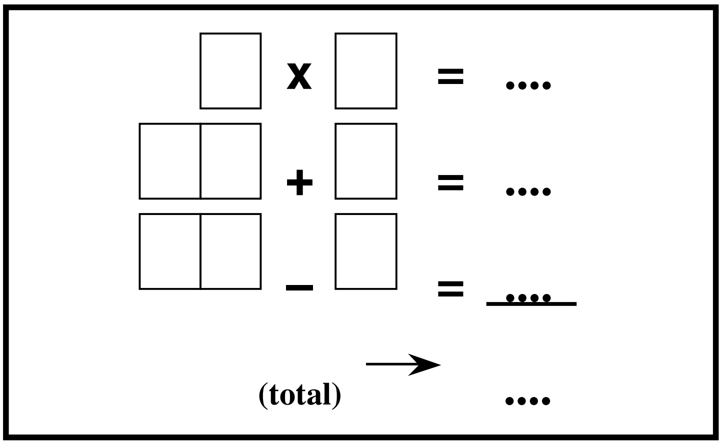
Origine : Rozzano

5. QUI DIT MIEUX ? (Cat. 3, 4, 5)

Anne et Bernard participent à la finale du concours « Qui dit mieux ». Les organisateurs de la finale ont préparé huit cartes avec les chiffres de 1 à 8.



Au tableau, ils ont aussi préparé une multiplication, une addition et une soustraction.



Anne et Bernard doivent y placer les huit cartes, une dans chaque case. Ensuite, ils effectuent les opérations et doivent obtenir le plus grand total possible en additionnant les résultats des 3 opérations.

Anne a obtenu un total de 113

1 x 3 = 3
24 + 5 = 29
87 − 6 = 81
(total) → 113

Bernard n'a obtenu que 63

5 x 2 = 10
34 + 8 = 42
17 − 6 = 11
(total) → 63

Anne semble avoir gagné ! Mais les organisateurs affirment qu'il est possible de trouver un total plus grand encore.

À vous de trouver ce plus grand total possible. (Mais attention, n'utilisez jamais deux fois le même chiffre!)

Complétez le tableau pour obtenir le plus grand total possible.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication ; système décimal de position ; distinguer chiffre, nombre

Analyse de la tâche

- Comprendre que changer la position des chiffres dans un nombre modifie ce nombre.
- Remarquer (par exemple en effectuant quelques essais) que les quatre cases importantes pour obtenir un total élevé sont les deux cases du produit et les deux cases des dizaines et que le « 1 » doit être le deuxième terme de la soustraction, ce qui est le moins « pénalisant». Il vaut donc mieux garder les « petits chiffres » en position de chiffres des unités dans l'addition et la soustraction.
- Déterminer la position des « grands » chiffres par organisation de la recherche :

  dans la multiplication, « 8 » et « 7 » donnent un produit de 56, qu'il faudrait ajouter à 60 et 50 en plaçant le « 6 » et le « 5 » dans les dizaines, ce qui assurerait déjà un total de 56 + 60 + 50 = 166,

  « 8 » et « 7 » placés dans les dizaines donneraient 80 et 70 et le plus grand produit serait 6 × 5 = 30, ce qui assurerait déjà un total de 80 + 70 + 30 = 180

  « 8 » et « 6 » placés dans les dizaines donneraient 80 et 60 et le plus grand produit serait 7×5 = 35 ce qui conduirait à 175, total inférieur à 180, de même pour « 8 » et « 5 », « 7 » et « 6 » ou « 7 » et « 5 ».
- Utiliser les « 4 », « 3 » et « 2 » comme chiffres en position des unités pour l'addition et le premier terme de la soustraction (où ils sont interchangeables) et obtenir ainsi : (6 × 5) + 84 + 3 + 72 – 1 = 188. (Remarquer éventuellement qu'il existe plusieurs dispositions des chiffres pour obtenir ce plus grand total - permutation de 6 et 5 dans le produit, de 8 et 7 dans les dizaines, de 4, 3 et 2 dans les unités - pour obtenir ce total le plus grand.)
- Ou travailler pas essais successifs non organisés et indiquer le plus grand total trouvé.
- Vérifier les opérations, vérifier que le même chiffre n'a pas été utilisé plusieurs fois.

  Le travail peut être facilité par la construction effective des cartes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (188), avec l'écriture d'une des possibilités qui justifie ce total (par exemple 188 = (6 × 5) + 84 + 3 + 72 – 1)

3 Réponse différente de 188 due à une seule erreur de calcul mais avec une disposition correcte des chiffres

2 Une des 5 réponses 174, 176, 178, 180, 183 qui correspondent aux 5 autres permutations des chiffres 8, 7, 6, et 5 avec écriture du calcul correspondant

1 Autre réponse avec placement des huit chiffres (de genre des réponses données en exemple)

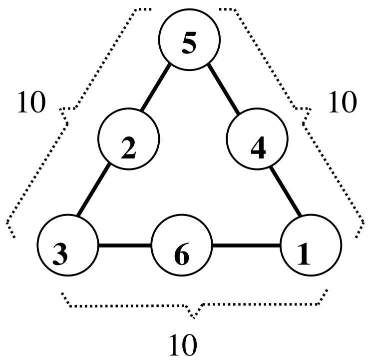
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Lyon

6. TRIANGLE MAGIQUE (Cat. 4, 5)

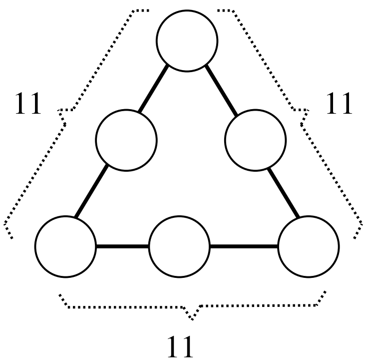
Cette figure est un *triangle magique de somme 10*.
Si on additionne les trois nombres sur chaque côté du triangle on obtient toujours 10.



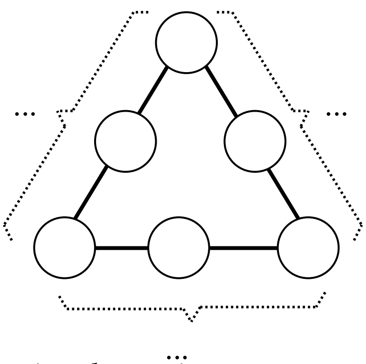
En plaçant autrement les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 on peut obtenir *un triangle magique de somme 11* (où la somme des trois nombres de chaque côté du triangle est toujours 11) ou encore des triangles magiques de sommes différentes de 10 et 11.

Placez les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 pour obtenir le triangle magique de somme 11, ci-dessous.

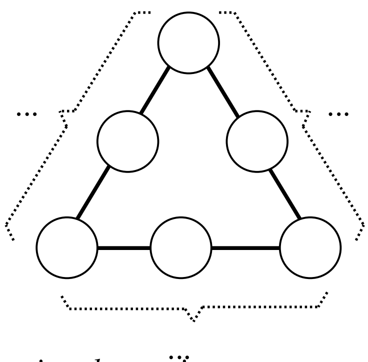
Placez encore les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 pour obtenir, si possible, un ou deux triangles magiques, avec des sommes différentes entre elles, autres que 10 et 11 ?



triangle magique, somme 11



triangle magique, somme ...



triangle magique somme ...

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition
- Logique : organisation d'une recherche

Analyse de la tâche

- Comprendre, à partir de l'exemple, les propriétés du triangle magique construit avec les nombres de 1 à 6.
- Découper éventuellement des jetons de papier avec les nombres de 1 à 6 ; puis commencer la recherche du triangle de somme 11, par essais non organisés et ensuite par adaptations successives en découvrant certaines règles du genre :

  sur un côté, en permutant le nombre central et celui d'un des sommets, la somme de ce côté reste constante mais celle du côté adjacent concerné est modifiée,

  en plaçant 6 sur un sommet, on aura certainement une somme supérieure à 10,
- Trouver ainsi le triangle de somme 11 par essais ou en comparant avec le triangle de somme 10, en échangeant les nombres 1, 3, et 5 des sommets par 2, 4 et 6 : 11 = 6 + 1 + 4 = 4 + 5 + 2 = 2 + 3 + 6

Ou : pour un nombre somme donné, par exemple 11, écrire toutes les décompositions en sommes des 3 nombres de 1 à 6 :

6 + 4 + 1 6 + 3 + 2 5 + 4 + 2

et remarquer que seuls les nombres 6, 4 et 2 figurent à deux reprises et sont donc à placer aux sommets du triangle. Placer les 3 autres nombres en tenant compte des décompositions.

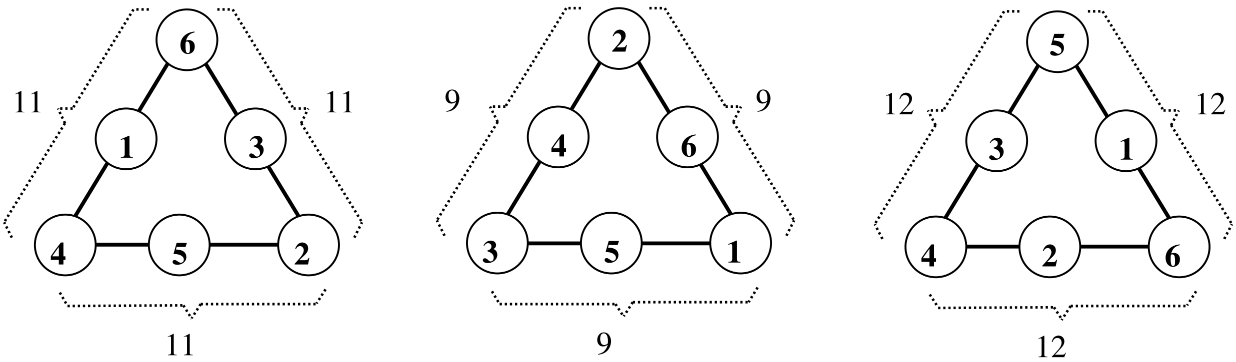
Ou : constater que les nombres placés sur les sommets interviennent dans deux sommes alors que ceux des milieux n'interviennent que dans une somme et en déduire que, en plaçant les trois plus grands nombres (4, 5, 6) sur les sommets, on aura des sommes plus grandes que lorsque ces nombres sont sur les milieux des côtés.

- Découvrir ainsi le triangle magique de somme 12 = 6 + 1 + 5 = 5 + 3 + 4 = 4 + 2 + 6

- Pour trouver d'autres sommes, se rendre compte qu'elles sont forcément supérieures à 6 (1 + 2 + 3) et inférieures à 15 (4 + 5 + 6) et par un raisonnement analogue, en plaçant les trois petits nombres (1, 2, 3) sur les sommets, découvrir le triangle magique de somme 9 = 1 + 6 + 2 = 2 + 4 + 3 = 3 + 5 + 1

Attribution des points

4 Les trois triangles de sommes 11, 9 et 12 complétés correctement, sans erreur (d'autres dispositions de ces solutions sont possibles, par symétrie ou rotation)



3 Deux des trois triangles de sommes 11, 9 et 12 complétés correctement, (on tient compte des triangles magiques différents mais pas des répétitions ou des triangles non magiques, ce)

2 Un des trois triangles de sommes 11, 9 et 12 complétés correctement,

1 Un triangle (non magique) mais avec deux côtés de même somme

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 4, 5

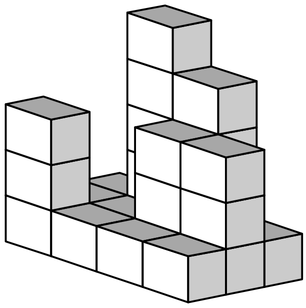
Origine : 1er RMR, brochure ateliers

7. LA LIBRAIRIE (Cat. 4, 5, 6)

La librairie du *Pays des maths* a commandé de nombreux exemplaires du livre « Les problèmes ». Ces livres sont arrivés emballés dans des cartons qui contiennent 25 livres chacun.

Ces cartons ont été empilés de façon à obtenir un grand parallélépipède de six étages. Chaque étage est constitué de trois rangées de quatre cartons chacune.

En quelques jours, beaucoup de cartons ont été enlevés pour vendre les livres, et voilà ce qui reste du grand parallélépipède :



Tous les livres des cartons enlevés ont été vendus et tous les cartons qui restent sont pleins.

Combien d'exemplaires du livre « Les problèmes » ont été vendus ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : sommes et produits
- Géométrie : parallélépipède, vue dans l'espace, idée intuitive de volume

Analyse de la tâche

- Déduire des indications que le nombre initial des cartons est: 3 × 4 × 6 = 72 et compter directement à partir du dessin le nombre de cartons restants (par exemple, procéder en comptant les cartons de chaque étage: 1er étage: 12 ; 2ème étage : 5 ; 3ème étage : 5 ; 4ème étage : 2 ; 5ème étage : 1, et trouver leur total : 25)
- Obtenir par soustraction le nombre de cartons manquants: 72 – 25 = 47.

Ou : déduire du dessin le nombre de cartons manquants (47) en imaginant le parallélépipède complet et se souvenir qu'un étage complet, le sixième, est manquant. Par exemple, procéder en comptant les cartons manquants de chaque étage: 1er étage : 0; 2ème étage : 7 ; 3ème étage : 7 ; 4ème étage : 10 ; 5ème étage : 11 ; 6ème étage : 12 : et trouver leur total: 47.

Conclure dans chaque cas que le nombre d'exemplaires du livre vendus est de 47 × 25 = 1 175.

Ou calculant à chaque étape le nombre de livres, plutôt que les nombres de cartons :

calcul du nombre initial de livres : il y avait 72 cartons, donc 1 800 livres (72 × 25 = 1 800),

calcul du nombre de livres restants : il reste 25 cartons, donc 625 livres (25 × 25 = 625)

Calcul du nombre de livres vendus : 1 175 livres (1 800 – 625 = 1 175)

Attribution des points:

4 Réponse correcte (1175) avec explications

3 Réponse correcte avec explications peu claires

2 Réponse correcte sans explications

ou réponse incorrecte due à une erreur de calcul, mais avec explications claires (l'oubli d'un étage n'est pas considéré comme erreur de calcul mais comme erreur de raisonnement)

ou réponse portant sur le nombre d'exemplaires restants et non sur celui d'exemplaires vendus

1 Début de recherche correcte (par exemple oubli d'un étage)

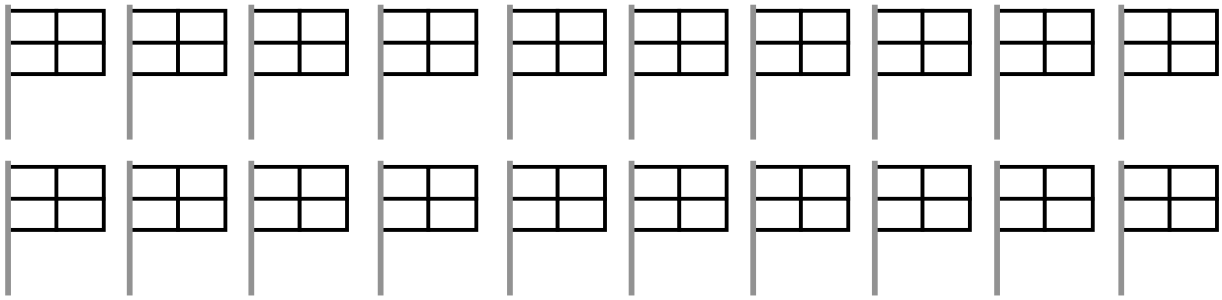
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Siena

8. LES BLASONS (II) (Cat 5, 6)

Voici vingt modèles de blasons composés chacun de quatre rectangles à colorier. Ils seront affichés sur les portes des vingt classes d'une école.



Les élèves décident de colorier ainsi le blason de chaque classe :

- chacun des quatre rectangles doit être colorié d'une même couleur : soit en rouge, soit en bleu, soit en jaune ;
- sur chaque blason, il doit y avoir les trois couleurs ;
- des rectangles qui ont un côté en commun doivent être de couleurs différentes.

Chacune des vingt classes pourra-t-elle avoir un blason différent de celui des autres classes avec ces règles de coloriage ?

Combien y a-t-il de blasons différents ? Montrez comment vous les avez coloriés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : combinatoire
- Géométrie : aspects topologiques

Analyse de la tâche

- Comprendre toutes les contraintes (pas de rectangle non colorié, trois couleurs à disposition qui doivent figurer sur chaque blason, une par rectangle, contiguïté, coloriages différents).
- Comprendre que si les 3 couleurs doivent être utilisées sur chaque blason, l'une apparaîtra 2 fois puisqu'il y a 4 rectangles à colorer. Les deux rectangles de cette couleur (n'ayant pas de côté commun) n'auront qu'un sommet commun et se situeront sur l'une des deux diagonales du blason.

  Comme il y a 3 couleurs, cela donne 2×3 possibilités de placer la couleur utilisée 2 fois.

  Pour chacune de ces 6 possibilités, il y a ensuite 2 façons de placer les 2 autres couleurs, ce qui fait un total de $2 \times 3 \times 2 = 12$ possibilités.
- Dessiner tous les blasons possibles.

R	J
B	R

R	B
J	R

B	R
J	B

B	J
R	B

J	B
R	J

J	R
B	J

B	R
R	J

J	R
R	B

J	B
B	R

R	B
B	J

R	J
J	B

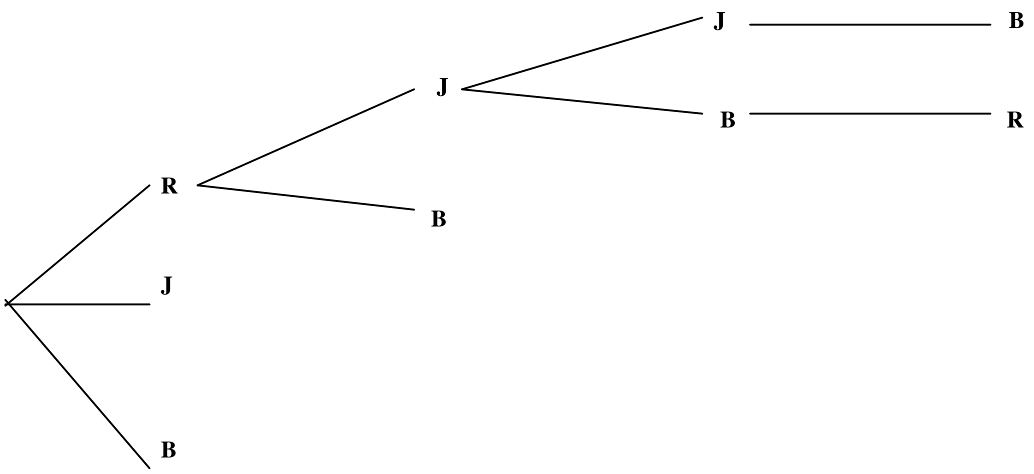
B	J
J	R

et donner la réponse : il n'est pas possible d'avoir 20 blasons différents pour les 20 classes, mais seulement 12.

Ou Procéder de façon aléatoire, avec le risque d'oublier des blasons.

Ou : Utiliser un raisonnement qui correspond à l'arbre suivant :

rectangle (haut-gauche) rectangle (haut-droite) rectangle (bas-gauche) rectangle (bas-droite)



Donc, au total, 12 blasons (3 × 2 × 2 × 1 = 12).

Attribution des points:

4 Réponse correcte (non, il n'y a que douze blasons possibles, avec tous les dessins correctement coloriés)

3 Onze ou dix blasons corrects différents (avec tous les dessins correctement coloriés) avec ou sans répétition

2 Neuf, huit, ou sept blasons corrects différents (avec tous les dessins correctement coloriés) avec ou sans répétition

1 De 3 à 6 blasons corrects différents

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Rozzano

9. LA MACHINE À FRITES (Cat. 5, 6, 7)

Dans l'usine Bellefrites, on a installé plusieurs machines identiques pour couper les pommes de terre en frites.

Le premier jour, on a fait fonctionner trois machines pendant deux heures et on a obtenu 300 kg de frites.

Le deuxième jour, on a fait fonctionner six machines pendant quatre heures.

Combien de kg de frites ont été obtenus au cours de ces deux jours ?

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : proportionnalité, linéarité

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a trois grandeurs en jeu dans le problème, la durée de travail (en heures), le nombre de machines et les quantités de frites (en kg), et que la troisième dépend des deux autres.
- Dissocier les deux variations : durée –> quantité de frites et nb. machines –> quantité de frites. (C'est là que se situe l'obstacle à la résolution du problème car il faut comprendre qu'on est dans un cas de « double linéarité » : la quantité étant fonction des deux autres grandeurs, chacune des fonctions étant linéaire).
- Appliquer une propriété – encore intuitive - de la linéarité entre la durée et la quantité après avoir constaté que la durée a doublé du premier au second jour et que, par conséquent la quantité devra doubler aussi si l'autre grandeur (le nombre de machines) reste constante.
- Appliquer la même propriété de linéarité entre le nombre de machines et la quantité de frites après avoir constaté que le nombre de machines a aussi doublé du premier au second jour et que, par conséquent la quantité de frites devra doubler aussi si l'autre grandeur (la durée) reste constante.
- Combiner les deux variations (« doubler » pour l'une et pour l'autre) pour en conclure que la quantité de frites sera multipliée par 4 du premier au second jour : 300 × 4 = 1 200. (Et éviter donc la simple multiplication par 2 qui conduirait à la réponse 300 × 2 = 600).

  Un tableau de ce genre illustre une procédure « experte » d'une dissociation du problème en deux étapes en maintenant à chaque fois l'une des grandeurs constante et en doublant l'autre :

Nombre de machines	3	6	6
Nombre d'heures	2	2	4
Nombre de kg	300	600	1 200

Ou, calculer la production à l'heure de chaque machine (ce qui correspond au passage à l'unité en linéarité simple) :

si 3 machines produisent 300 kg de frites en 2 heures, 1 machine en produit 100 kg en 2 heures et 1 machine en produit 50 kg en 1 heure

ou si 3 machines produisent 300 kg de frites en 2 heures, 3 machines en produisent 150 kg en 1 heure et 1 machine en produit 50 kg en 1 heure

puis remonter à la production de 6 machines en 4 heures par une multiplication par 4 puis par 6 (50 × 4 × 6 = 1200)

- Dans un cas comme dans l'autre, additionner les productions des deux jours pour répondre à la question : 300 + 1200 = 1500 (en kg)

Attribution des points

4 Réponse correcte (1 500 kg) avec explications claires

3 Réponse correcte (1 500 kg) avec explications peu claires
ou réponse incomplète (1 200 kg pour le 2e jour) avec explications claires

2 Réponse incomplète (1 200 kg pour le 2e jour) avec explications peu claires
ou réponse correcte sans explications

1 Début de raisonnement correct, par exemple en fixant l'une des variables ou en cherchant la quantité produite en 1 heure ou par 1 machine
ou réponse 900 kg. (avec erreur sur le deuxième jour, par prise en compte d'une « linéarité globale » qui ne dissocie pas les deux variables et par conséquent, conduit à une seule multiplication par 2)

0 Incompréhension du problème ou raisonnement incorrect (réponse 600 kg pour le 2e jour)

Niveaux : 5, 6, 7 Origine**: Siena**

10. LE FESTIVAL DE ROCK (Cat. 5, 6, 7)

Chaque année un célèbre festival est organisé à Rockville.
149 jeunes sont arrivés à l'auberge de jeunesse.

- L'auberge met à disposition 22 chambres.
- Chaque chambre comporte soit 8 lits, soit 5 lits.
- Les jeunes occupent tous les lits des 22 chambres.

Combien y a-t-il de chambres de 8 lits? Combien de chambres de 5 lits?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, multiples
- Algèbre : traduction de conditions en langage algébrique

Analyse de la tâche

- Traduire la situation dans le cadre numérique : décomposer 149 en une somme de 22 termes 8 ou 5, ou décomposer 149 en une somme de deux termes dont l'un est un produit de 8 par un nombre (de chambres à 8 lits) et l'autre est un produit de 5 par un autre nombre (de chambres à 5 lits), tels que la somme des deux nombres de chambres est 22.
- On peut constater par exemple, par estimation, que si toutes les chambres étaient à 8 lits, il y aurait trop de places (car 8 × 22 = 176 > 149) ou qu'il en manquerait si toutes les chambres étaient à 5 lits (car 5 × 22 = 110 < 149) et s'engager alors dans une résolution proche de la méthode de « fausse position » : par exemple, il manque 39 places (149 – 110) dans l'hypothèses des chambres à 5 lits ; chaque fois qu'on remplace une chambre à 5 lits par une chambre à 8 lits on gagne 3 places ; il faudrait remplacer 13 (39 : (procédures effectivement relevées dans tous les anciens problèmes du RMT reposant sur un système de deux équations linéaires à deux variable dont les solutions sont des couples de nombres naturels)
- Traduire la situation dans le cadre numérique : décomposer 149 en une somme de 22 termes 8 ou 5, ou décomposer 149 en une somme de deux termes dont l'un est un produit de 8 par un nombre (de chambres à 8 lits) et l'autre est un produit de 5 par un autre nombre (de chambres à 5 lits), tels que la somme des deux nombres de chambres est 22.
- On peut constater par exemple, par estimation, que si toutes les chambres étaient à 8 lits, il y aurait trop de places (car 8 × 22 = 176 > 149) ou qu'il en manquerait si toutes les chambres étaient à 5 lits (car 5 × 22 = 110 < 149) et s'engager alors dans une résolution proche de la méthode de « fausse position » : par exemple, il manque 39 places (149 – 110) dans l'hypothèses des chambres à 5 lits ; chaque fois qu'on remplace une chambre à 5 lits par une chambre à 8 lits on gagne 3 places ; il faudrait remplacer 13 (39 : 3) chambres à 5 lits par des chambres à 8 lits pour arriver à 149 places ; il resterait alors 9 (22 – 13) chambres à 5 lits (Le même raisonnement est valable à partir de l'hypothèse des chambres à 8 lits : (176 – 149 = 27 places en trop ; 27 : 3 = 9 chambres à 8 lits à remplacer par des chambres à 5 lits, 22 – 9 = 13 chambres à 8 lits).

Ou : essayer avec une répartition arbitraire des chambres, (souvent en nombres égaux). Par exemple, s'il y avait 11 chambres de chaque type, il y aurait (11 × 5) + (11 × 8) = 143 places et il en manquerait 6 (149 - 143). Il suffirait alors de remplacer deux chambres à 5 lits par 2 chambres à 8 lits et on arriverait à une répartition de 13 chambres à 8 lits et 9 chambres à 5 lits.

Ou, à l'aide d'un tableau ou d'une disposition en lignes et colonnes, dresser l'inventaire de toutes les possibilités :

ch. à 5 lits	0	1	...	8	9	10	11	12	13	14	...	21	22
places	0	5	...	40	45	50	55	60	65	70		105	110
ch à 8 lits	22	21	...	14	13	12	11	10	9	8	...	1	0
places	176	168	...	112	104	96	88	80	72	64	...	8	0
total des places	176	173	...	162	159	156	153	152	**149**	146		113	110

Ou : faire un tableau à partir de la décomposition de 149 en multiples de 5 et de 8 :

Dortoirs à 8 lits	…	**8**	9	10	11	12	**13**	14	15	16	17	**18**
Adolescents	…	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144
Adolescents	…	85	77	69	61	53	45	37	29	21	13	5
Dortoirs à 5 lits	…	**17**					**9**					**1**

La solution 8 dortoirs à 8 lits, 17 dortoirs à 5 lits n'est pas à retenir, car elle correspondrait à 25 dortoirs ; la solution 18 dortoirs à 8 lits,1 dortoirs à 5 lits non plus, car elle correspondrait à 19 dortoirs.

La solution 13 dortoirs à 8 lits, 9 dortoirs à 5 lits est la seule qui convient, car 13 + 9 = 22 !
Il y a 13 dortoirs à 8 lits et 9 dortoirs à 5 lits.

- Ce problème peut évidemment se résoudre par une mise en équation (selon le degré scolaire et les programmes nationaux).
  Si, par exemple, x représente le nombre de dortoirs à 8 lits, on doit résoudre l'équation : $8x + 5(22 - x) = 149$.
  La solution $x = 13$ conduit à la même conclusion que ci-dessus.

Attribution des points

4 Réponse correcte (13 chambres à 8 lits et 9 chambres à 5 lits) avec justifications claires et complètes

3 Réponse correcte (13 et 9) avec explications peu claires ou seulement la vérification ($13 \times 8 + 9 \times 5 = 149$)
ou raisonnement correct et bien argumenté avec une seule erreur de calcul

2 La bonne solution sans justification valable
ou raisonnement bien argumenté mais qui ne tient pas compte d'une des conditions (par exemple du total des chambres ou du total des enfants)

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

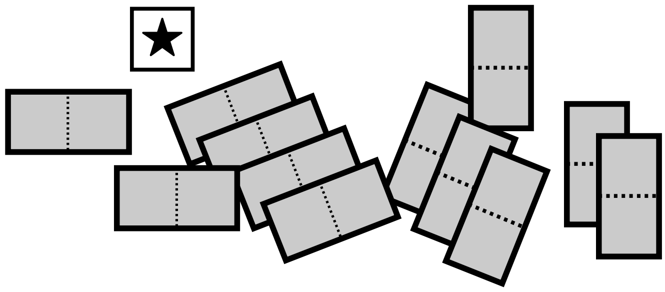
Niveaux : 5, 6, 7,

Origine : Luxembourg

11. L'ÉTOILE ET LES DOMINOS (Cat. 5, 6, 7, 8)

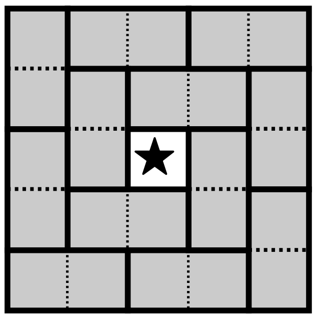
Nicolas a 12 dominos, qui permettent chacun de recouvrir deux cases de cette grille. Il a aussi un carré marqué d'une étoile, qui permet de recouvrir une case.

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

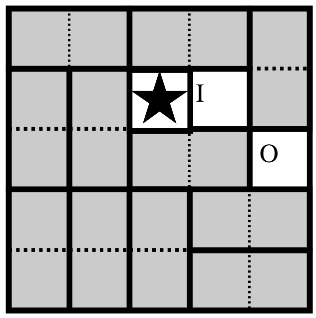


Il essaye de placer le carré sur une des cases et de recouvrir toutes les autres avec les 12 dominos.

Ici, il a placé le carré sur la case M, au milieu de la grille et il est arrivé à recouvrir la grille entière avec les 12 dominos :



Ici, il a placé le carré sur la case H, mais il n'a pas pu recouvrir la grille avec les 12 dominos :



Sur quelles cases peut-on placer l'étoile pour pouvoir ensuite recouvrir toute la grille avec les 12 dominos ?

Indiquez les cases possibles et, pour chacune d'elles, dessinez l'étoile et les 12 dominos qui recouvrent toute la grille.

Vous pouvez utiliser les grilles de la page suivante pour vos dessins.

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : pavage d'un carré quadrillé à l'aide de rectangles et carrés

Analyse de la tâche

- Construire les pièces et mener des essais ou trouver une manière « légère » de noter les dominos (un trait) et de les déplacer (effacer)
- Essayer, case par case, de trouver une disposition, la noter et dessiner les dominos.

Ou : à partir de l'exemple donné, retirer l'étoile de la case centrale, retirer un domino voisin puis le replacer sur la case centrale et sur une de ses voisines libérées. Il reste une case libre pour l'étoile qui peut être G, I, Q ou S. Répéter le processus à partir de la nouvelle position de l'étoile : la retirer, placer un des dominos voisins sur la case libérée et une autre ...

- Déterminer que lorsqu'une case est trouvée (par exemple coin du carré ou case « milieu d'un côté »), 3 autres sont également trouvées (par rotation ou symétrie). En dehors de la case centrale, il y a donc 3 groupes de 4 cases, soit 12 cases possibles.
- Faire l'hypothèse, après quelques essais, que les cases possibles se situent sur les diagonales de la grille ou au milieu des côtés.
- Par essais, vérifier qu'en plaçant l'étoile sur une autre case, comme dans le deuxième exemple (en H), il est impossible de recouvrir la grille avec les 12 dominos.
- Donner les 13 cases possibles : A, C, E, G, I, K, M, O, Q, S, U, W, Z avec la disposition des dominos.

Attribution des points

4 Les 12 autres cases trouvées (autres que M) : A, C, E, G, I, K, O, Q, S, U, W, Z sans intrus et avec
 - soit tous les dessins avec les dominos,
 - soit quelques dessins et des explications qui évoquent implicitement ou explicitement les rotations, les symétries ou les diagonales

3 Les 12 autres cases trouvées (autres que M) et 1 ou 2 dessins manquants ou incomplets ou explications insuffisantes

2 Les 12 autres cases trouvées (autres que M) sans dessins ni explications
 ou au moins 8 cases, sans intrus, avec dessins ou explications satisfaisantes

1 8 autres cases trouvées et dessins incomplets ou explications insuffisantes
 ou au moins 4 cases, sans intrus, avec dessins ou explications satisfaisantes

0 Incompréhension du problème ou moins de 4 autres cases correctes

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Groupe problèmes

12. LE MOT DE PASSE (Cat. 6, 7, 8)

Marie-Thérèse Rococo a choisi un mot de passe pour son ordinateur, composé de 6 chiffres suivis de 3 lettres majuscules.

- les 6 chiffres choisis sont tous différents et le 0 ne figure pas parmi eux,
- leur somme est 23,
- les six chiffres forment un nombre inférieur à 420 000,
- le produit du premier chiffre et du dernier est 28,
- le troisième, le quatrième et le cinquième chiffres forment un nombre qui est multiple de 59,
- les trois lettres du code sont les initiales de Rococo Marie-Thérèse, dans cet ordre.

Quel est le mot de passe de Marie-Thérèse ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : nombres et chiffres, opérations
- Logique: relations entre les nombres, déductions, organisations des données.

Analyse de la tâche

- Comprendre que, puisque les six chiffres du code sont tous différents et qu'on connaît leur somme, on peut envisager de rechercher toutes les décompositions de 23 en sommes de 6 nombres différents et constater que - vu que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$- qu'il n'y en a que deux $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8$ et $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7$ aux permutations près.
- Comprendre aussi que la seule décomposition multiplicative de 28 en produit de deux nombres d'un seul chiffre est 4×7 ou 7×4. De ces deux premières constatations, on sait que les six chiffres du nombre sont 1, 2, 3, 4, 6 et 7.
- De l'information disant que le nombre est inférieur à 420 000, déduire que le premier chiffre est 4, le deuxième est 1, le sixième est 7 et chercher un nombre formé de trois chiffres restants, 2, 3 et 6 dans la liste des multiples de : 59, 118, 177, **236**, 295, 354, 413, 472, 531, 590, 649, 708, ...

  Comme 236 est le seul multiple de 59 qui convient, en déduire que les six chiffres du code sont, dans l'ordre : 412367
- Le code complet est donc 412367RMT

Attribution des points

4 Réponse correcte (412367RMT) avec explications précises des étapes par lesquelles on est arrivé à la solution, et vérification de l'unicité de la solution (décomposition additive de 23, liste des multiples de 59 inférieurs à 700 ...)

3 Réponse correcte avec explications précises mais qui ne font pas apparaître l'unicité de la solution
ou le code numérique correct (412367) et bien expliqué, sans tenir compte des lettres

2 Réponse correcte, mais sans explications ni vérification de l'unicité de la solution
ou le code numérique correct (412367) avec explications imprécises, sans tenir compte des lettres
ou solution ne tenant pas compte d'une seule des conditions de l'énoncé

1 Début de recherche, mais sans tenir compte de deux des conditions de l'énoncé

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : FJ, adaptation d'un thème classique

13. MONTÉE AU REFUGE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Marc et André partent ensemble pour une promenade au refuge de l'Ours. Chacun d'eux marche à allure constante. Après 30 minutes Marc, plus rapide, s'arrête pour une pause et 10 minutes plus tard, il est rejoint par André qui, lui, ne s'arrête pas et arrive au refuge exactement une heure après être parti.

Si la pause de Marc dure 20 minutes, qui arrivera le premier au refuge ? Et combien de temps avant l'autre ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations sur les grandeurs finies (distance, durée, vitesse), proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'André met 40 minutes pour parcourir la première partie et donc 20 minutes pour la seconde partie
- Déduire que la distance sur la seconde partie est la moitié de celle de la première et que Marc mettra 15 minutes pour la parcourir. Si on inclut 20 minutes de pause et 30 minutes pour la première partie, Marc met en tout 65 minutes ainsi il arrive 5 minutes après André.

Ou, comme André et Marc mettent respectivement 40 minutes et 30 minutes pour effectuer un même trajet, cela signifie que le rapport de leurs vitesses est 4/3, donc Marc effectuera le second trajet dans un temps qui est les 3/4 de celui mis par André. Comme André effectue le second trajet en 20 minutes, Marc en mettra 15 (+ 20 minutes de pause)

Ou, en raisonnant de même sur le rapport des vitesses, Marc effectuera le trajet entier en un temps qui est les 3/4 de celui mis par Andrée. Comme Andrée met 60 minutes pour ce trajet, Marc marche durant 45 minutes. Avec 20 minutes de pause, cela fait 65 minutes pour arriver au refuge.

Ou, comprendre qu'un écart de 10 minutes sur le premier trajet correspond à un écart de 5 minutes sur le second qui est deux fois moins long. Ce raisonnement peut être favorisé par une représentation graphique.

Attribution des points :

4 Réponse correcte (André arrive 5 minutes avant Marc) avec explication complète et convaincante

3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire, ou bien raisonnement correct et bien argumenté avec une erreur de calcul

2 Réponse correcte sans explication

1 Début de raisonnement correct (par exemple calcul du rapport des vitesses ou du temps mis par Marc pour effectuer le second trajet)
ou procédure correcte avec interprétation erronée relative à la pause avec une réponse du type « Marc arrive 5 minutes avant ».

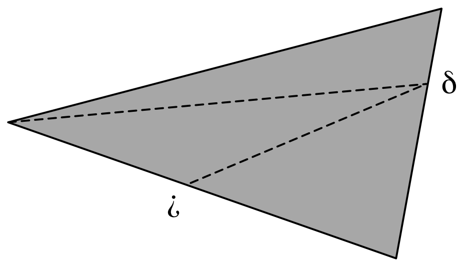
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : Parma

14. LE MANTEAU DE MARTIN (Cat. 7, 8, 9, 10)

Un jour où il n'avait sur lui que ses armes et son manteau fait d'une seule pièce, au milieu d'un hiver plus rigoureux qu'à l'ordinaire et si rude que bien des gens mouraient de froid, à la porte de la cité des Ambiens (Amiens, France), Martin rencontra deux pauvres nus. Les malheureux avaient beau prier les passants d'avoir pitié d'eux, tous passaient outre. Martin, voyant que les autres n'étaient pas touchés de compassion, comprit que ceux-là lui avaient été réservés. Mais que faire ? Il n'avait rien que la chlamyde (cape triangulaire) dont il était revêtu ; il avait déjà sacrifié le reste pour une bonne oeuvre analogue. Alors, il saisit son épée, dans l'intention de couper son manteau en trois triangles d'aire égale, d'en donner un à chacun des pauvres et de se draper de nouveau dans le triangle qui lui resterait.
Il étendit donc sa cape sur le sol et choisit de la couper de cette manière (selon les segments en pointillés ---), mais il ne savait pas très bien où placer les marques ¿ et δ sur les côtés pour son découpage afin d'avoir trois parties de même aire.



Cependant, après avoir réfléchi, Martin se rendit compte qu'il pouvait trouver exactement l'emplacement de ses marques, même sans utiliser d'instrument de mesure. Il suffisait de savoir plier précisément.

Indiquez où se situent les marques ¿ et δ sur les deux côtés.

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : Reconnaissance de triangles. Décomposition d'une figure
- Grandeurs et mesures : propriétés de la formule d'aire d'un triangle, proportionnalité

Analyse de la tâche :

- Se rendre compte et que la solution est indépendante des mesures des côtés du triangle, vu l'absence d'indications de longueurs dans l'énoncé et que la seule donnée se rapporte aux trois « triangles », de « même aire », qui est, par déduction, le tiers de celle du grand triangle.
- Constater que les deux triangles inférieurs de la figure, équivalents selon la consigne (1/3 et 1/3), ont la même hauteur par rapport à leur sommet commun, δ, et qu'ils ont donc des bases isométriques. En déduire que le repère ¿ est au milieu du côté inférieur.
- Observer les deux triangles : le triangle supérieur de la figure et le triangle constitué des deux triangles inférieurs. Constater que l'aire du second (2/3) est le double de celle du premier (1/3), qu'ils ont la même hauteur par rapport au sommet de gauche et que, par conséquent, la base du second doit être le double de celle du premier. En déduire, par proportionnalité, que le repère δ se situe au tiers du côté de droite depuis le haut et au deux tiers depuis le bas.

Ou attribuer des longueurs aux côtés et hauteurs (arbitraires ou selon les mesures prises sur le dessin) des mesures inconnues (x, y, ...) aux distances cherchées et résoudre le problème algébriquement.

Attribution des points

4 Les réponses correctes (1/3 ou 2/3 du côté de droite et ½ du côté inférieur) avec des explications détaillées et précises.

3 Réponse correcte avec explications confuses
ou réponse correcte mais relative à des mesures choisies arbitrairement

2 Réponse correcte sans explications
ou une des réponses correcte et bien expliquée
1 Une des réponses correctes sans explications
ou début de raisonnement correct
0 Incompréhension du problème

Catégories 7, 8, 9, 10

Origine : Ticino + FJ (D'après la *Vie de St Martin* par Sulpice Sévère, vers 380)

15. DES PRIX QUI MONTENT (Cat. 7, 8, 9, 10)

En 2009, le prix d'un objet A est de 8 euros. Ce prix augmentera de 2 euros le premier janvier de chaque année.

Pour un autre objet B, le prix variera ainsi :
- le prix initial au premier janvier 2009 est 4 euros,
- le prix au premier janvier 2010 vaudra 10% de plus que le prix initial de 2009,
- le prix au premier janvier 2011 sera le prix de l'année précédente augmenté de 20% du prix initial, de 2009,
- le prix au premier janvier 2012 sera celui de l'année précédente augmenté 30% du prix initial, de 2009,
- et ainsi de suite, année après année.

Y aura-t-il une année où le prix de l'objet B deviendra plus élevé que le prix de l'objet A? Si oui, cela se produira le premier janvier de quelle année ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances
- Arithmétique : pourcentages
- Algèbre

Analyse de la tâche
- Comprendre que, pour l'objet A, l'augmentation est constante, de 2 euros par année.
- Comprendre que par contre, le prix de l'objet B n'augmente pas de façon constante.
- Procéder année après année avec éventuellement un tableau :

année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Prix A (€)	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
Prix B (€)	4	4,4	5,2	6,4	8	10	12,4	15,2	18,4	22	26	30,4	35,2	40,4

et observer que le prix de que le prix de l'objet B devient plus élevé que celui de A en 2021

Ou bien (niveau expert) :
- Chercher des lois générales permettant d'exprimer le prix p des objets en fonction de n (nombre d'années à partir de 2009). Pour l'objet A on a la fonction linéaire $p=2n+10$; pour l'objet B, à l'année n, le prix initial augmente de $(1+2+3+...+n) \times 0,4$; soit en utilisant la formule de la somme des n premiers nombres : $p=4+(n+1)n \times 0,2$; ceci correspond à une fonction du second degré dont la représentation graphique est une parabole. La solution du problème s'obtient en résolvant le système des deux équations.

Attribution des points

4 Réponse correcte (1 janvier 2021) avec justification (tableau ou graphique, ...)
3 Réponse correcte avec justification peu claire ou incomplète
2 Réponse correcte sans justification ou raisonnement correct avec erreur de calcul
1 Début de raisonnement correct (par exemple calcul du prix B les premières années)
ou calcul du prix de B en ne comptant que les augmentations à partir du prix initial
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

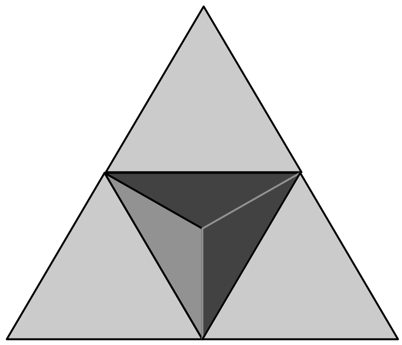
Origine : Parma

16. ÉTOILE DE NOËL (Cat. 8, 9, 10)

Pour décorer le sapin de la fête de Noël, Florence souhaite réaliser une étoile en 3D.

Pour cela, elle a fabriqué dans un carton assez rigide un grand tétraèdre régulier d'arêtes 8 cm et quatre petits tétraèdres réguliers d'arêtes 4 cm.

Elle colle sur chacune des quatre faces du grand tétraèdre un petit tétraèdre, en plaçant les trois sommets d'une de ses faces sur les milieux des trois côtés de la face du grand (voir figure).



Puis elle souhaite recouvrir chaque partie visible de cette étoile avec un papier décoratif de manière que chaque face de l'étoile soit recouverte d'un unique morceau de papier.

Elle dispose d'une feuille de papier de 16 cm × 14 cm.

Proposez un plan de découpage du papier décoratif montrant que la feuille est assez grande pour recouvrir toute l'étoile et expliquez pourquoi.

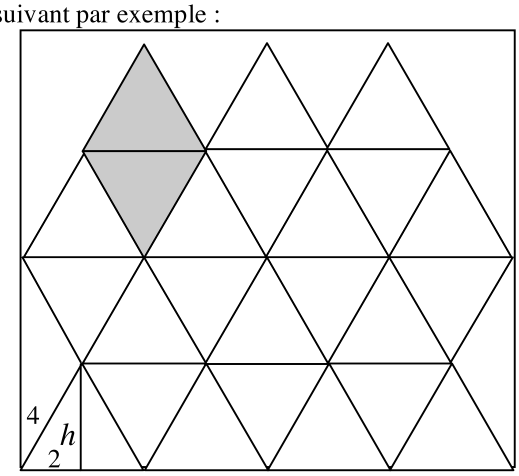
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie du solide : tétraèdre régulier)
- Géométrie plane : triangle équilatéral, droite des milieux dans un triangle, pavage
  Arithmétique et mesures : propriété de Pythagore

Analyse de la tâche

- Se rappeler qu'un tétraèdre régulier est une pyramide à 4 faces formées de triangles équilatéraux.
- Remarquer que les droites passant par les milieux des côtés d'une face du grand tétraèdre partagent celle-ci en 4 triangles équilatéraux égaux de côtés 4 cm.
- Comprendre que pour chacune des faces du grand tétraèdre, le collage d'un petit tétraèdre laisse apparents 3 petits triangles équilatéraux de 4 cm de côtés.
- Remarquer également que les faces restant visibles des petits tétraèdres collés sont formées de 3 triangles équilatéraux de mêmes dimensions.
- Dénombrer les petits triangles équilatéraux apparents : 6 pour chacune des faces du grand tétraèdre, d'où 24 en tout.
- Il s'agit de découper dans la feuille de papier décoratif donnée en 24 triangles équilatéraux de 4 cm de côté. Un pavage astucieux de cette feuille le permet, avec un plan comme le suivant par exemple :
- Pour être sûr que les 24 triangles entrent bien dans la feuille de 16 cm × 14 cm, effectuer une vérification numérique : calculer la hauteur h d'un triangle équilatéral à partir du théorème de Pythagore
  $h^2 = 4^2 – 2^2$, d'où
  $h = \sqrt{12} \approx 3{,}464$, et $4\,h \approx 13{,}856 < 14$ cm.



Attribution des points

4 Solution correcte : un dessin de la disposition des 24 triangles avec une vérification numérique

3 Solution correcte : un dessin des 24 triangles avec une vérification numérique incomplète

2 Solution correcte : un dessin des 24 triangles sans vérification numérique

1 Solution basée seulement sur une confrontation des aires des 24 triangles avec l'aire de la feuille ($24 \times 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3} < 224 = 14 \times 16$) sans vérification par le dessin

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

17. JEU D'ENCASTREMENT (Cat. 8, 9, 10)

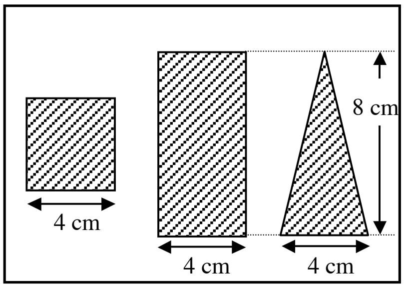
Dimitri a reçu un jeu d'encastrement constitué de quelques pièces de bois : cubes, parallélépipèdes, pyramides, prismes qu'il faut entrer dans une boîte en bois par un des trous percés dans son couvercle.

Chaque pièce bouche exactement le trou par lequel elle entre dans la boîte, sans laisser d'espace entre elle et les parois du trou.

Il y a des pièces qui ne peuvent entrer que par l'un des trous, il y en a qui peuvent entrer par deux des trous et il y en a une qui peuvent entrer par les trois trous.

Cette figure montre le couvercle, avec les trois trous :

- un carré de 4 cm de côté,
- un rectangle de 4 cm sur 8 cm,
- un triangle isocèle de 4 cm de base et 8 cm de hauteur.



Quelle est la forme de la pièce qui peut entrer par chacun des trois trous, en le bouchant exactement lorsqu'elle y passe.

Dessinez un développement (patron) précis de cette pièce qui permette de la construire, après l'avoir découpé, plié et collé avec du papier collant.

ANALYSE A PRIORI

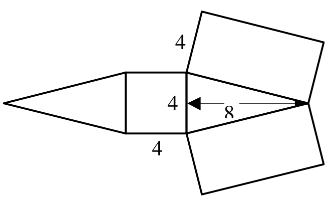
Domaine de connaissances

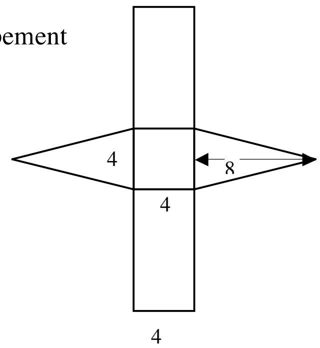
- Géométrie : polyèdres et développements, carré rectangle et triangle

Analyse de la tâche

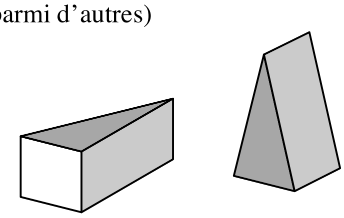
- Concevoir un polyèdre passant exactement par chacun des trous et penser par exemple au cube de 4 cm d'arête, à un parallélépipède dont une face est le rectangle donné et à un prisme droit dont la base est le triangle donné
- Imaginer ensuite un polyèdre passant par deux des trous, par exemple un prisme droit de base carrée de 8 cm de hauteur pour le carré et le rectangle, une pyramide régulière à base carrée de 8 cm de hauteur pour le carré et le triangle, ...
- Adapter mentalement un polyèdre passant par deux trous pour qu'il passe par le troisième. Par exemple, le prisme droit précédent peu être taillé sur deux faces rectangulaires opposées pour que les deux autres faces rectangulaires deviennent des triangles afin d'obtenir un prisme droit à base triangulaire, de hauteur 4 cm ; ou la pyramide précédente peut être complétée sur deux faces opposées pour devenir le prisme droit à base triangulaire, de hauteur 4 cm.
- Dessiner le développement, et construire éventuellement le polyèdre, dont une face est un carré de 4 cm, deux faces sont des triangles isocèles de 8 cm de hauteur et les deux autres faces des rectangles de 4 cm et dont la largeur correspond à l'un des côtés isométriques du triangle ($\sqrt{68} \cong 8{,}2$ cm dont l'indication n'est pas nécessaire)

deux exemples de développement du prisme (parmi d'autres)





deux vues (photos) du prisme (parmi d'autres)



Attribution des points

4 Dessin correct du développement montrant l'isométrie des longueurs des rectangles et des côtés du triangle isocèle (on n'exige pas la vraie grandeur, un dessin à l'échelle convient aussi)

3 Le polyèdre est reconnu mais le développement n'est pas correct (par exemple : les côtés des rectangles et des côtés du triangle ne sont pas isométriques)
ou le polyèdre est reconnu mais il est dessiné par une vue (photo) reconnaissable ou désigné par son nom précis et complet : prisme droit dont la base est le triangle isocèle et de hauteur 4 cm

2 Le polyèdre est reconnu mais avec un développement incomplet (faces manquantes ou se superposant) ou dessiné par une vue (photo)
ou dessin correct d'un développement de polyèdre qui ne bouche que deux trous (parallélépipède- ou prisme droit - de 4 x 4 x 8, ou pyramide régulière de base carrée et de 8 cm de hauteur, etc.)

1 Dessin correct du développement d'un polyèdre qui ne bouche qu'un seul trou

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

18. RETARD À L'ALLUMAGE (Cat. 9, 10)

Le jour de l'équinoxe de printemps, le 21 mars, Angela, qui habite à Rimini en Italie, est allée sur la plage pour voir le lever du soleil sur la ligne d'horizon entre le ciel et la mer Adriatique.

Elle sait qu'au même moment son ami Antoine, qui habite à Bastia en Corse, est sur la jetée du port en train de guetter aussi le lever du soleil à l'horizon entre le ciel et la mer Tyrrhénienne.

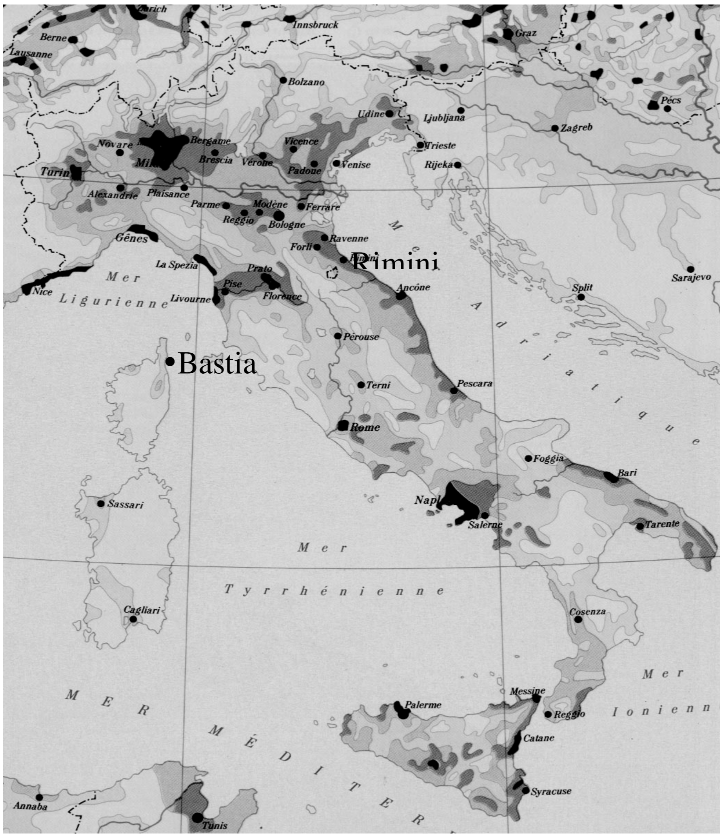
Angela se dit : « Dommage, nous ne le verrons pas exactement ensemble : pauvre Antoine, il doit attendre encore un peu pour voir le soleil se lever parce que Rimini et Bastia ne sont pas à la même longitude ».

Un bon atlas indique que :

- Rimini a pour latitude nord 44° 3' et pour longitude est 12° 34'.
- Bastia a pour latitude nord 42° 42' et pour longitude est 9° 27'.

Combien de temps après Angela, Antoine verra-t-il le lever du soleil ?

Expliquez pourquoi le soleil se lève plus tard à Bastia qu'à Rimini et montrez les calculs que vous avez faits pour trouver.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : sphère et cercle, repérage géographique, mesures d'angles et de durées
- Arithmétique : transformations de mesures, proportionnalité

Analyse de la tâche

- Se rappeler les notions de latitude et de longitude : angles au centre de la terre. La latitude nord (sud) d'un parallèle varie de 0° à l'équateur à 90° au pôle nord (sud) et la longitude d'un méridien est comptée depuis le méridien de Greenwich (banlieue de Londres) vers l'est ou vers l'ouest par un angle de 0° à 180°.
- Remarquer que dans le problème la donnée de la latitude est inutile.
- Comprendre que le passage du soleil entre deux méridiens est dû à la rotation de la terre qui effectue un tour de 360° en 24 heures.

- Comprendre que l'écart angulaire entre les deux méridiens de Rimini et de Bastia, soit 3°7', représente la partie des 360° du parcours apparent du soleil en un jour autour de la terre, dans un temps t qui lui est proportionnel sur 24 heures.
- Calculer cette quatrième proportionnelle après avoir exprimé les angles en minutes d'angles et les temps en minutes : 3°7' = 187', d'où la proportion t/24x60 = 187/360x60, d'où t = 187x2/30 = 12,47 mn = 12mn 28s.
- Conclure qu'Antoine verra le soleil se lever 12 minutes et 28 secondes après Angela.

Attribution des points

4 Réponse exacte (12 minutes et 28 secondes) avec signification de la longitude et explication de la proportionnalité

3 Réponse exacte avec explication peu claire et calcul intuitif

2 Réponse fausse due à une erreur de calcul ou de conversion, avec signification de la longitude et explication de la proportionnalité

1 Réponse fausse, avec seulement l'explication de la longitude ou la relation entre les 360° et les 24 heures

0 Réponse fausse sans explication ou incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Franche-Comté

19. PLATES-BANDES (Cat. 9, 10)

Le jardinier Joseph aime les plates-bandes circulaires. Hier, il en a fait une, formant une bordure avec des plantes disposées en cercle à 50 centimètres l'une de l'autre, la distance entre les plantes est mesurée en suivant la circonférence. Aujourd'hui, il veut en faire une plus grande, circulaire elle aussi, et toujours avec des plantes espacées de 50 centimètres. Le rayon de la nouvelle plate-bande mesure 32 centimètres de plus que le rayon de la plate-bande faite hier.

Combien faudra-t-il de plantes supplémentaires au jardinier pour faire la nouvelle plate-bande ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie et mesure : circonférence d'un cercle, valeurs approchées
- Algèbre : calcul littéral, systèmes linéaires et solutions dans N

Analyse de la tâche

- Comprendre que si r désigne le rayon de la première plate-bande, le rayon de la seconde est $r + 32$
- Comprendre que, pour savoir combien il faut de plantes en plus dans la seconde plate-bande, il faut connaître la différence de mesure entre les deux circonférences : $2\pi(r + 32) - 2\pi r = 64\pi$
- Diviser par la distance entre deux plantes pour connaître le nombre de plantes supplémentaires : $64\pi/50 \approx 4{,}02...$ et déduire qu'il faut 4 plantes supplémentaires.
- Ou bien, désigner par n le nombre de plantes utilisées pour la première plate-bande et par x le nombre de plantes à ajouter. Comprendre que la mesure de la circonférence de la première plate-bande est $50n$, celle de la seconde plate-bande est $50(n+x)$.
- Sachant que les mesures respectives des circonférences des deux plates-bandes sont $2\pi r$ et $2\pi(r + 32)$, poser le système linéaire suivant :
- $\begin{cases} 2\pi r = 50n \\ 2\pi(r+32) = 50(n+x) \end{cases}$
- En soustrayant les deux équations on obtient $2\pi(r + 32) - 2\pi r = 50x$, d'où $x \approx 4{,}02$

  Comme x est un entier naturel, en déduire qu'il faut 4 plantes supplémentaires.

Attribution des points

4 Réponse correcte (4 plantes) avec calculs justifiés

3 Réponse correcte mais démarche ou calculs incomplets ou peu clairs

2 Procédure correcte, mais erreur de calcul

1 Début de raisonnement correct ou bien réponse 4,0192

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine: Parma