Numéro et titre :	Catégorie :								Domaines*:							Origine :
1. Le code de l'immeuble	3	4							Ar				Co			UD
2. Les sept nains se pèsent	3	4							Ar							fj
3. Une partie de dés	3	4							Ar			Lo				UD
4. Fourmis sur un filet	3	4	5								Géo					RZ
5. Quel beau drapeau	3	4	5								Géo					SI
6. Labyrinthe arithmétique		4	5	6					Ar		Géo					SI
7. De 0 à 700			5	6					Ar							MI
8. La face cachée du cube			5	6							Géo	Lo				FC
9. Jetons en triangles			5	6	7				Ar						F	FC
10. Finale du 18e RMT			5	6	7	8			Ar		Géo					SI
11. Papillotes				6	7	8			Ar	Alg		Lo				BB
12. Sports divers				6	7	8						Lo				SI
13. Au supermarché					7	8	9	10	Ar			Lo		Mes		TI
14. Une belle affiche					7	8	9	10	Ar		Géo			Mes		CA+PR
15. Triangle célèbre					7	8	9	10	Ar						F	fj
16. Tapis de cartes						8	9	10	Ar		Géo					LU+fj
17. Tic tac							9	10	Ar							gpp
18. Les vacances							9	10	Ar					Mes		LO
19. Spirales							9	10	Ar	Alg				Mes	F	SI

* Ar : Arithmétique — Alg : Algèbre — Géo : géométrie — Lo : logique
Co : combinatoire — Mes : mesures — F : fonctions

1. LE CODE DE L'IMMEUBLE (Cat. 3, 4)

Voici le clavier qui se trouve à l'entrée d'un immeuble.

A	B	C
D	E	F

En composant un code, on peut ouvrir la porte d'entrée. Le code doit comporter deux lettres différentes. Par exemple, avec les lettres B et F, on peut former deux codes différents : BF et FB. Mais BB n'est pas un code qui ouvre la porte.

Dans cet immeuble, il y a 35 appartements. Les propriétaires voudraient avoir chacun un code différent.

Est-t-il possible d'avoir 35 codes différents, de deux lettres, pour ouvrir la porte d'entrée ?

Expliquez pourquoi c'est possible ou pourquoi ce n'est pas possible.

ANALYSI A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication
- Logique et combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre comment se construisent les codes : deux lettres, ordonnées, la seconde étant différente de la première. Exclure ainsi les codes avec répétitions comme AA et comprendre que AB est un code différent de BA.
- Organiser la recherche de tous les codes différents pour être certain de les trouver tous, sans répétitions :
  - listes de codes d'abord au hasard, puis recherche d'éventuels doublons ou codes manquants ;
  - listes ordonnées avec, éventuellement, l'utilisation d'outils de représentation comme les tableaux, arbres ou autres types de diagrammes.

Ou, utilisation d'un raisonnement de type combinatoire, par exemple :

- il y a 6 choix pour la première lettre et, pour chaque choix d'une première lettre, il en reste 5 pour la deuxième, ce qui conduit à $6 \times 5 = 30$ codes différents.
- il y a 36 assemblages possibles ($6 \times 6 = 36$), mais il faut enlever les 6 assemblages avec répétition de lettre soit 30 codes ($36 – 6 = 30$).

- Constater que les 30 codes possibles de deux lettres ne suffiront pas pour les 35 appartements et répondre « non » à la question.

Attribution des points

4 Réponse correcte « Non » avec une explication où les 30 possibilités sont justifiées par une liste (organisée ou non) ou par la multiplication 5×6 ou par le calcul $6 \times 6 - 6$

3 Réponse « Non » en annonçant un nombre de codes allant de 27 à 33, avec une liste comportant des oublis ou des répétitions
ou réponse « Non » mentionnant les 30 possibilités mais sans autre explication

2 Mêmes réponse que pour 3 points, annonçant un nombre de codes allant de 27 à 33, (différent de 30) mais sans explication ni liste justificative
ou réponse « Oui » avec l'explication qu'il y a 36 possibilités (avec les cas ou les lettres sont répétées), avec explications

1 Réponse « Non » sans aucune explication
ou inventaires incomplets allant de 20 à 26 ou de 34 à 40 codes

0 Incompréhension du problème ou réponse « Oui » sans autre explication ou inventaires très incomplets

Niveaux : 3, 4

Origine : Udine

2. LES SEPT NAINS SE PÈSENT (Cat. 3, 4)

Blanche Neige a offert une balance aux sept nains.
Ils sont montés l'un après l'autre sur la balance et ont noté leur poids sur une feuille qu'ils ont donnée à Blanche Neige, mais sans préciser leurs noms :

22 kilos 14 kilos 16 kilos 11 kilos 17 kilos 24 kilos 19 kilos

Puis, pour jouer, ils sont montés par deux sur la balance, sauf Grincheux qui n'en avait pas envie.
Ils annoncent à Blanche Neige que :

- Dormeur et Prof étaient ensemble sur la balance ;
- Timide et Joyeux étaient ensemble sur la balance ;
- Atchoum et Simplet étaient ensemble sur la balance ;

et ils ajoutent avec surprise que la balance indiquait chaque fois le même poids !
Blanche Neige leur dit alors :
« - Ne me dites rien de plus, je sais maintenant quel est le poids de Grincheux. »

Quel est le poids de Grincheux ?

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition

Analyse de la tâche

- Appropriation du problème : les sept poids, le fait que lorsque deux nains sont ensemble sur la balance, elle indique la somme de leurs deux poids.
- Comprendre qu'il faut trouver, parmi les 7 nombres correspondant aux poids des 7 nains, trois couples dont la somme est égale.
- Additionner deux à deux les nombres donnés pour y trouver trois sommes égales. Cette recherche peut être organisée de manière plus ou moins efficace : à partir d'une somme de deux nombres, voir si on retrouve la même avec deux des cinq autres nombres : essais de sommes organisés (par exemple en commençant par additionner le plus petit poids avec le plus grand…) ; on peut aussi envisager une « table d'addition » des 7 nombres et trouver parmi les 21 résultats de la table [(7 x 6 : 2] celui qu'on retrouve trois fois.

  Lorsqu'on a découvert que 33 = 11 + 22 = 16 + 17 = 14 + 19, le « 24 » reste seul. En déduire qu'il s'agit du poids de Grincheux.
- Ou, (solution peu probable à ce niveau), ajouter tous les poids (résultat 123 kg), remarquer que ce nombre est divisible par 3 et qu'en enlevant de ce total le poids de Grincheux il faut obtenir un résultat lui aussi divisible par 3. Le poids de Grincheux doit donc être divisible par 3, ce qui n'est le cas que pour le nombre 24.

Attribution des points

4 Réponse correcte « Grincheux pèse 24 kilos » ou « 24 kg » avec une explication montrant les trois sommes égales, composées de six termes, et le nombre « isolé »

3 Réponse correcte « Grincheux pèse 24 kilos » ou « 24 kg » avec une explication incomplète ou peu claire

2 Réponse « Grincheux pèse 24 kilos » ou « 24 kg » sans explication

1 Début de recherche : deux couples de même somme sont trouvés (par exemple 17 + 19 = 22 + 14 = 36)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : fj

3. UNE PARTIE DE DÉS (Cat. 3, 4)

Alberto et Monica ont deux dés, avec 1, 2, 3, 4, 5 et 6 points sur les faces.
Ils inventent un jeu qui se déroule en dix tours.
À chaque tour, chacun des joueurs, l'un après l'autre :
- lance les deux dés,
- additionne les nombres de points indiqués par les deux dés
- ajoute ce résultat aux points qu'il a obtenus lors des tours précédents.

Le vainqueur est celui qui totalise le plus de points à la fin des dix tours.
Après dix tours, Alberto a fini de jouer et il a obtenu 52 points.
Après neuf tours, Monica a déjà obtenu 43 points. Elle lance les dés pour la dernière fois, mais l'un des deux dés tombe et roule sous l'armoire où l'on ne peut plus le voir.
Alberto regarde le dé qui est resté sur la table et dit : « Tu n'as pas gagné ! ».

Combien de points Alberto a-t-il pu voir sur le dé qui est sur la table pour être certain que Monica n'a pas gagné ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et soustraction
- Logique : déduction

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'à chaque lancer, il faut additionner les points des deux dés.
- Se rendre compte que, lorsqu'elle aborde le dernier tour, Monica a totalisé 9 (52 − 43 = 9) points de moins que Alberto, qui, lui a fini de jouer.
- En déduire que, pour gagner, Monica doit obtenir un nombre de points supérieur ou égal à 10. (Si elle obtient 9 points, ils seront ex-aequo et Monica n'aura pas gagné).
- Dresser alors l'inventaire des possibilités de points sur le dé visible pour que Monica ne gagne pas (total de moins de 10 points sur les deux dés) ou pour qu'elle gagne (avec un total de 10, 11 ou 12 points sur les deux dés) :

  si c'est 6, Monica ne gagne pas si le dé invisible porte 3, 2 ou 1, mais gagnerait si ce dé porte 4, 5 ou 6,

  si c'est 5, Monica ne gagne pas si le dé invisible porte 4, 3, 2 ou 1 ; mais gagnerait si ce dé porte 5 ou 6,

  si c'est 4, Monica ne gagne pas si le dé invisible porte 5, 4, 3, 2 ou 1 ; mais gagnerait si ce dé porte 6,

  si c'est 3, 2 ou 1 Monica ne peut pas gagner puisqu'elle ne marquerait qu'au plus 9 points.

  En déduire que Alberto a vu 1, 2 ou 3 sur le dé visible.

Ou, raisonnements du genre des précédents, mais en essayant différentes sommes qu'il est possible d'obtenir avec 2 dés (de 2 à 12) et en retenant celles qui sont inférieures à 10).

Attribution des points

4 Les trois possibilités (1, 2 ou 3) avec explications (la limite de 10 points et un inventaire des possibilités qui ne permettent pas d'atteindre cette limite)

3 Les trois possibilités (1, 2 ou 3) avec explications incomplètes ou peu claires

2 Les trois possibilités (1, 2 ou 3) sans aucune explication
ou réponse 1 et 2 avec explications qui montrent une confusion entre gagné et égalité

1 Début de raisonnement montrant qu'il faut que Monica fasse au moins 10 points pour gagner ou au plus 9 points pour perdre

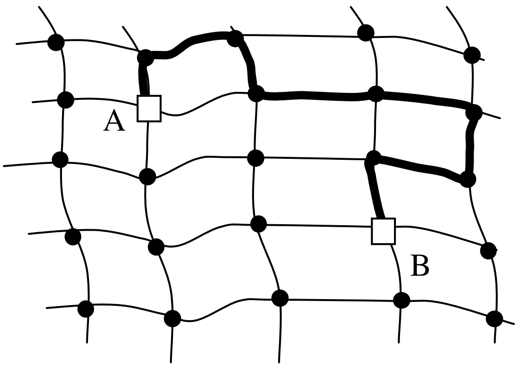
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Udine

4. FOURMIS SUR UN FILET (Cat. 3, 4, 5)

Alice (A) et Béatrice (B) sont deux fourmis qui habitent chacune sur un noeud d'un filet.
Un jour, Alice va chez Béatrice en suivant les cordes du filet et en passant par 7 noeuds, sans compter le nœud de départ et le nœud d'arrivée, comme sur ce dessin :

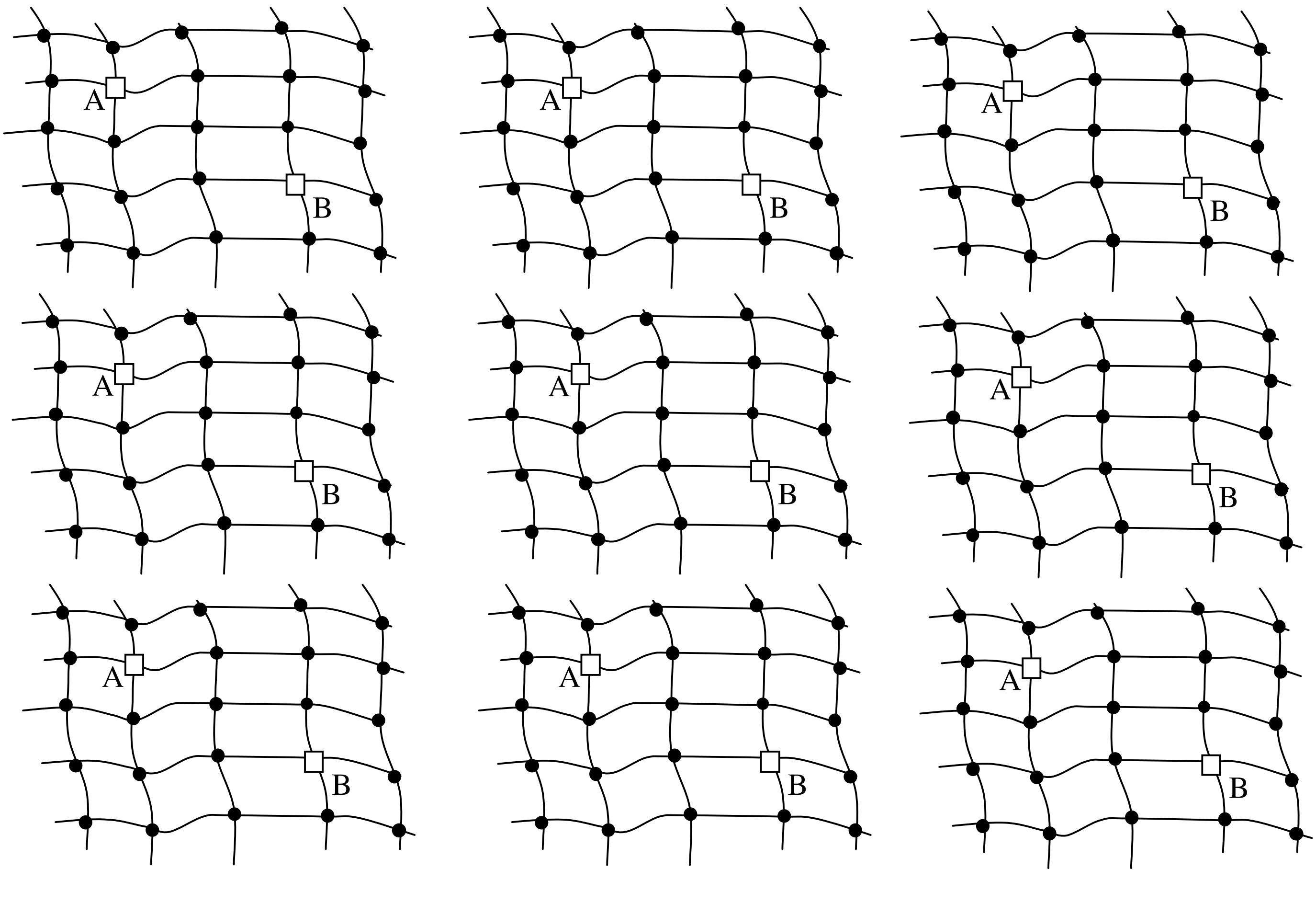


Béatrice dit à Alice : « Tu n'as pas choisi le chemin le plus court ! »
Alice lui répond : « Lundi, je viendrai en suivant un chemin qui passe par le moins de noeuds possible du filet. »
Béatrice lui lance alors un défi : « Ce qui serait bien, c'est que la semaine prochaine tu viennes chez moi en suivant chaque jour un chemin différent et qui passe par le moins de noeuds possible. »

Alice peut-elle choisir pour chacun des 7 jours de la semaine un chemin différent, de façon que chacun de ces chemins passe par le moins de nœuds possible ?

Expliquez votre réponse.

Pour expliquer votre réponse, dessinez les chemins d'Alice qui passent par le moins de noeuds possible sur ces filets :



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie: recherche de parcours différents et optimaux

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de déplacement de A à B et le comptage des noeuds d'après l'exemple.
- Comprendre que pour effectuer un trajet comprenant le moins de nœuds possible, il faut passer de A à B le plus directement possible, soit en allant à droite, soit en allant vers le bas et en déduire que le minimum est 3 noeuds intermédiaires (ou 5 nœuds si on compte ceux de départ et d'arrivée), et que tous ces chemins ne font pas de "détours inutiles" en montant ou en allant vers la gauche.
- Essayer des chemins possibles et vérifier au fur et à mesure s'ils sont bien les plus courts (3 nœuds) et s'ils n'ont pas déjà été suivis (éliminer les doublons).

Ou structurer sa recherche en choisissant un critère de déplacement, par exemple d'abord tous les chemins différents en commençant par aller sur un nœud vers la droite, puis deux nœuds vers la droite, puis un nœud vers le bas, puis deux nœuds vers le bas.

- Constater qu'il n'y a que six chemins possibles qui ne suffiront pas pour les sept jours de la semaine.
- Répondre « non » à la question et, pour l'expliquer, dessiner les six chemins possibles différents sur les filets préparés:
  ➔➔🡻🡻 ; ➔🡻➔🡻 ; ➔🡻🡻➔ ; 🡻🡻➔➔ ; 🡻➔🡻➔ ; 🡻➔➔🡻 .

Attribution des points

4 Réponse correcte : « non, car il n'y a que 6 chemins différents » avec les dessins des six chemins différents de trois nœuds

3 Réponse correcte « non, il n'y a que 6 chemins différents (de trois noeuds)» mais sans les dessins de tous les chemins

2 Réponse « non », avec 4 ou 5 chemins différents de trois noeuds dessinés (et aucun chemin incorrect)
ou réponse « oui » avec 7 ou 8 chemins dont deux au plus erronés (plus de 3 nœuds ou chemins répétés)

1 Découverte de 2 ou 3 chemins différents corrects, de trois nœuds (et pas plus de deux chemins incorrects)
ou réponse « non » sans dessin ni explication ni commentaires

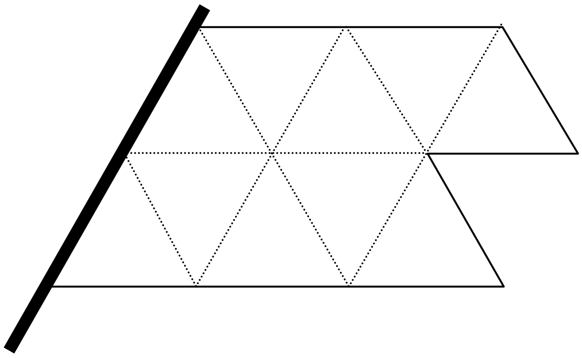
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine: Rozzano

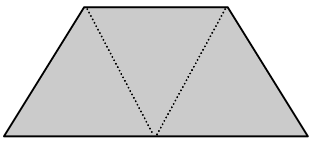
5. QUEL BEAU DRAPEAU ! (Cat. 3, 4, 5)

Les drapeaux de Transalpie ont tous la même forme et les mêmes couleurs. Ils se partagent en 10 triangles égaux toujours disposés comme sur ce dessin.

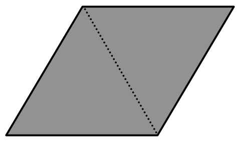


Les drapeaux sont tous formés de deux sortes de pièces de tissu, cousues ensemble :

des pièces jaunes, de cette forme, composée de trois triangles :



des pièces rouges, de cette forme, composée de deux triangles :

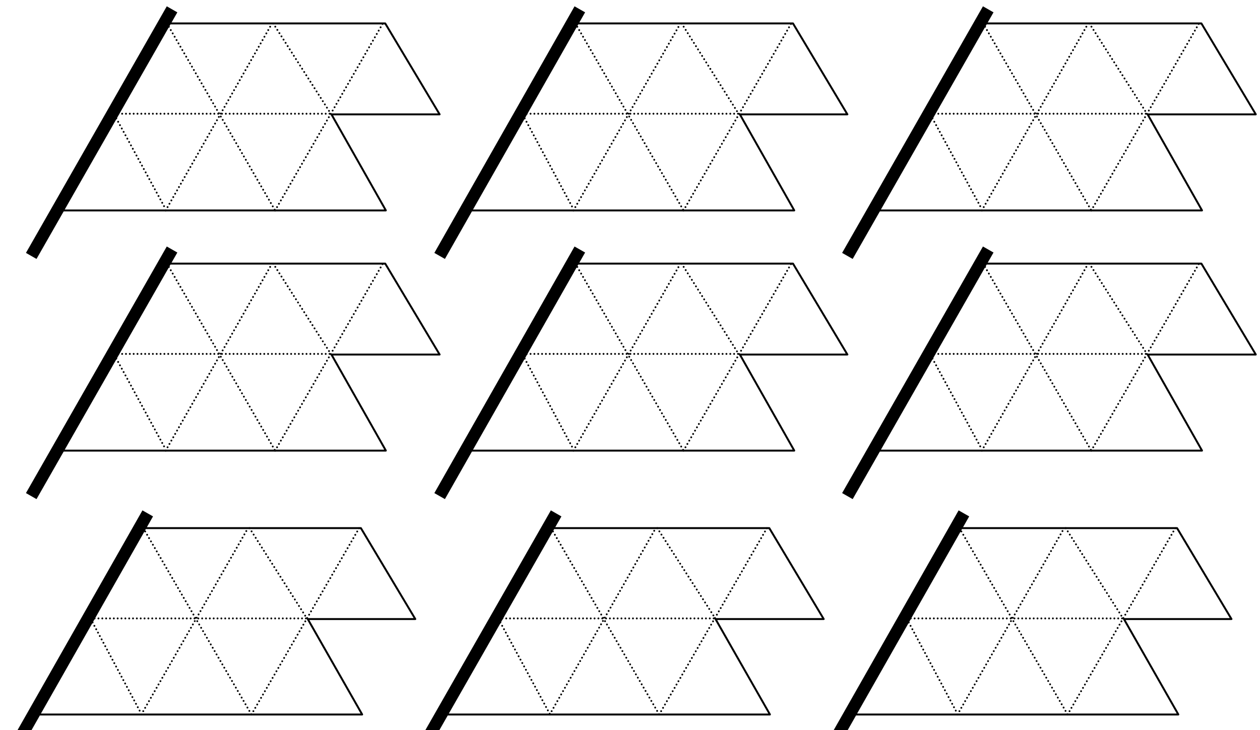


Il y a plusieurs manières d'assembler ces pièces pour faire un drapeau, sans qu'elles ne se superposent et sans laisser de trous.

Chacune de sept grandes villes de Transalpie voudrait avoir un drapeau diffèrent de ceux des six autres villes. Est-il possible de fabriquer sept drapeaux tous différents ?

Expliquez votre réponse.

Pour expliquer votre réponse, coloriez les drapeaux que vous avez trouvés sur ces dessins :



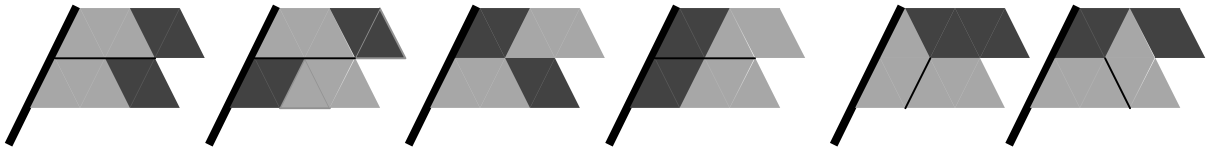
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Géométrie : reconnaissance de formes et pavage

Analyse de la tâche

- Comprendre qu’il faut paver la forme de dix triangles du drapeau avec des pièces de 2 et de 3 triangles
- Comprendre qu'on peut éliminer le cas de trois pièces de 3 triangles car il ne resterait qu’un triangle, puis éliminer le cas d’une pièce de 3 car il resterait sept triangles, puis éliminer encore le cas où il n’y a pas de pièces de 3 car le dessin du drapeau empêche le pavage en cinq pièces de 2.
- Constater que la répartition ne peut être que de deux pièces de 3 et deux pièces de 2.
- Essayer de dessiner les quatre pièces, de façon plus ou moins organisée ou par découpages, et découvrir les six dispositions possibles.



- Conclure que les sept villes ne peuvent pas avoir chacune un drapeau différent et répondre « non » à la question en dessinant les six dispositions.

Attribution des points

4 Réponse correcte : « non », avec dessin de 6 drapeaux différents

3 Réponse incomplète : « non », avec dessin de 4 ou 5 drapeaux différents
ou réponse non avec dessin de 5 ou 6 drapeaux mais avec une répétition de deux drapeaux identiques

2 Réponse incomplète: « non », avec dessin de 2 ou 3 drapeaux différents, dessinés clairement sur la grille
ou réponse non avec dessin de 4 drapeaux mais avec une répétition de deux drapeaux identiques

1 Seulement 1 drapeau correct (avec éventuellement des drapeaux approximatifs, mais respectant les formes utilisables)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

6. LABYRINTHE ARITMÉTIQUE (Cat. 4, 5, 6)

On entre dans ce labyrinthe par une case gris clair (sur le bord) et l'on en sort par la case 30.

On passe d'une case à une case voisine (qui la touche par un côté ou par un sommet) en respectant l'une ou l'autre des deux règles suivantes :

Règle 1 : le nombre de la case voisine sur laquelle on veut aller vaut 6 de plus que le nombre de la case où l'on se trouve.

Règle 2 : le nombre de la case voisine sur laquelle on veut aller vaut 4 de moins que le nombre de la case où l'on se trouve.

Par exemple, si l'on se trouve sur la case 7, on peut aller sur la case 13 (7 + 6) ou sur la case 3 (7 – 4); si l'on est sur la case 4 on ne peut aller que sur la case 10 (4 + 6).

1	2	3	4	5
6	7	18	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

sortie

Quelles sont les cases par lesquelles on peut entrer dans le labyrinthe en étant sûr de pouvoir en sortir par la case 30 ?

Pour chacune de ces cases d'entrée, indiquez par quelles cases on peut passer pour aller de la case d'entrée à la case 30 de sortie.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : observation de régularités additives dans un tableau de nombres
- Géométrie : déplacements sur un réseau

Analyse de la tâche

- Considérer la disposition des nombres sur le tableau et chercher à comprendre, en les essayant, les règles qui permettent de passer d'une case à l'autre.
- Observer que, d'une case à une case adjacente de la même ligne (soit à droite soit à gauche), le nombre de la case d'arrivée est celui de la case de départ augmenté ou diminué de 1; que d'une case à une autre qui lui est verticalement contiguë, le nombre de la case d'arrivée est celui de la case de départ augmenté ou diminué de 5. Vérifier que si, par contre, deux cases ont un seul sommet commun (elles sont en diagonale), de l'une à l'autre, le nombre peut soit augmenter ou diminuer de 4 soit augmenter ou diminuer de 6.
- En tirer la conséquence que les déplacements qui satisfont aux conditions de l'énoncé sont ceux allant vers une case en bas à droite en diagonale (+ 6) ou ceux allant vers une case en haut à droite en diagonale (- 4)
- Déduire alors de l'observation du tableau qu'un chemin menant à 30 ne peut pas commencer :
  - par un nombre impair (on peut le justifier en termes arithmétiques parce qu'en ajoutant 6 ou en enlevant 4 à un nombre impair on obtient toujours un nombre impair),
  - par un nombre pair situé dans une case au-dessus de la diagonale (d) formée par les nombres 6, 12, 18, 24, 30.
- En déduire que les quatre nombres de départ possibles sont 6, 16 et 26 et 28

  et qu'il y a un seul chemin à partir de 6 : **6** - 12 - 18 - 24 – 30

  trois chemins à partir de 16 : **16** - 12 - 18 - 24 - 30 ; **16** - 22 - 18 - 24 – 30 ; **16** -22 - 28 - 24 - 30

  deux chemins à partir de 26 : **26** - 22 - 18 - 24 - 30 ; **26** - 22 - 28 - 24 – 30

  et un seul chemin à partir de 28 : **28** - 24 - 30

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (les quatre cases de départ 6, 16, 26 et 28 avec au moins un chemin pour chacune)

3 Réponse correcte à la première question (6, 16, 26, 28) avec au moins un chemin décrit correctement
ou réponse avec les quatre nombres et chemins corrects et un autre nombre d'entrée parmi 12, 18, 22, 24

2 Réponse correcte à la première question (6, 16, 26, 28) sans aucun chemin décrit ou quelques chemins incorrects
ou réponse présentant 2 ou 3 des quatre nombres d'entrée corrects avec au moins un chemin correct

1 Début de recherche qui montre une compréhension des règles de construction des chemins

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Siena

7. DE 0 À 700 (Cat. 5, 6)

Bernard cherche à construire une suite de nombres qui commence par 0 et qui se termine par 700, en utilisant ces deux « machines » :

- « additionner 7 » —(+ 7)→ et « multiplier par 7 » —(x 7)→

- Il a commencé en utilisant seulement la machine « additionner 7 » :

  0 —(+ 7)→ 7 —(+ 7)→ 14 —(+ 7)→ 21 —(+ 7)→ 28 —(+ 7)→ 35 —(+ 7)→ ...

  et il a constaté que sa suite arrivera à 700 mais qu'elle sera très très longue.

- Il décide alors d'utiliser aussi la machine « multiplier par 7 » :

  0 —(+ 7)→ 7 —(x 7)→ 49 —(x 7)→ 343 —(x 7)→ 2401

  mais il n'a pas très bien choisi ses machines ; il a dépassé 700 après quatre étapes.

Cherchez à atteindre 700, en partant de 0 et en utilisant des machines à « additionner 7 » et à « multiplier par 7 » ?

Écrivez la suite la plus courte (celle qui utilise le moins de machines) que vous avez trouvée.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: addition et multiplication

Analyse de la tâche

- Lire le texte et les exemples, comprendre qu'on pourrait arriver à 700 en 100 machines à additionner mais qu'il faut rechercher un chemin plus court.
- Constater qu'il faut commencer par une machine à additionner car la multiplication de 0 par 7 donne 0.
- Constater que, comme dans le deuxième exemple, une addition suivie immédiatement d'une multiplication conduit à 49 puis qu'une deuxième ou troisième multiplication trop hâtives conduiront au-delà de 100, puis au-delà de 700.
- Constater que 100 x 7 = 700 mais que 100 n'est pas atteignable par des additions ou multiplications de (par) 7 ou que ce nombre est une limite pour la dernière multiplication.
- En conséquence, chercher à s'approcher de 100 et découvrir que 98 est accessible par des additions de 7 ou des multiplications par 7 : 98 = 49 + 49 = 70 + 28 = 14 x 7 = ... et que, parmi ces décompositions, 14 x 7 s'obtient aisément par (7 + 7) x 7.
- En déduire que la suite la plus courte se compose de deux additions, suivies de deux multiplications, suivies de deux additions (0 + 7 + 7) x 7 x 7 + 7 + 7 = 700 ou 0 + 7 = 7, 7 + 7 = 14, 14 x 7 = 98, 98 x 7 = 686, 686 +7 +7 = 700

Ou : travailler par essais et erreurs pour trouver la solution optimale

Ou : trouver une solution en douze opérations +7, x 7, +7, +7, +7, +7 +7, +7, +7, x 7 +7,+7 ou en dix-sept opérations (quatorze additions, une multiplication et deux additions)

Attribution des points

4 Réponse optimale en 6 étapes avec détail des calculs (0 + 7 + 7) x 7 x 7 + 7 + 7 = 700) ou suite de machines comme sur les exemples, ou suites d'opérations avec résultats intermédiaires

3 Réponse optimale en 6 étapes mais sans faire apparaître clairement les opérations

2 Réponse correcte (non optimale) en 12 ou 17 étapes
ou suite aboutissant à 700 avec une seule erreur de calcul

1 Début de suites respectant les règles mais n'arrivant pas à 700 (entre 650 et 750)

0 Incompréhension du problème

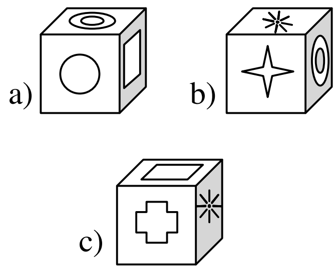
Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Milano

8. LA FACE CACHÉE DU CUBE (Cat. 5, 6)

Sur les faces d'un cube, on a dessiné les six figures ci-dessous :

Voici, ci-contre, trois photos de ce cube placé dans des positions différentes a), b), c) :



En observant ces photos, dites quelle est la figure dessinée sur la face opposée à celle où l'on a dessiné le cercle ○.

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie spatiale (vision du cube dans l'espace et de sa représentation en perspective)
- Logique (disjonction des cas et déduction)

Analyse de la tâche

- Construire un cube (ou son patron) et y dessiner sur ses faces les figures d'une des photos, par exemple a) , puis en observant la photo c), et en déplaçant le modèle, voir qu'il n'y a qu'une seule manière de placer les figures des deux autres faces contiguës à celle du carré. La face opposée au cercle est celle de l'étoile à huit branches. Vérifier éventuellement que la photo b) est compatible avec cette disposition.

Ou : constater que chaque photo détermine les positions relatives de trois figures et que ce sont celles qu'on retrouve sur deux photos qui permettront de déterminer les positions relatives des six figures :

A chaque fois qu'une figure est sur deux photos, on connaît aussi les figures des quatre faces adjacentes à celle de la figure commune et encore, par élimination, que la sixième figure est sur la face opposée. Il y a ainsi trois cas où une figure est commune à deux photos, qui permettent de savoir que :

- le carré est sur les photos a) et c), avec le cercle, le double cercle, la croix et l'étoile à huit branches sur les faces adjacentes, et l'étoile à 4 branches, est sur la face opposée à celle du carré ;
- le double cercle est sur les photos a) et b), avec le cercle, le carré, l'étoile à quatre branches et l'étoile à huit branches sur les faces adjacentes, et la croix est sur la face opposée à celle du double cercle ;
- l'étoile à huit branches est sur les photos b) et c), avec le double cercle, la croix et le carré et l'étoile à quatre branches sur les faces adjacentes, et le cercle est sur la face opposée à celle de l'étoile à huit branches.

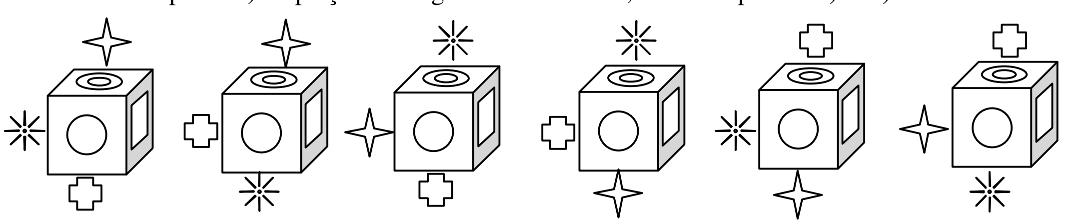
- Ce dernier cas donne la réponse du problème : la figure dessinée sur la face opposée au à celle du cercle est (l'étoile à huit branches).

(On remarque en passant que les photos b et c suffisent pour déterminer la réponse comme dans la première procédure, et que l'analyse des deux premiers cas est superflue.)

Ou : à partir d'un des deux premiers cas ci-dessus où les quatre figures des faces adjacentes à celle de la figure commune, sont déterminées, tenir compte de « l'orientation » du cube.

Par exemple, pour les photos a) et c), si l'on place une montre sur la face du carré, la première photo montre que le cercle précède le double cercle dans le sens de rotation des aiguilles puis, d'après la deuxième photo que l'étoile à huit branches précède la croix. On en déduit que le double cercle vient après le cercle et avant l'étoile à huit branches, ces deux figures étant dessinées sur des faces opposées.

Ou : conduire une analyse de type combinatoire. Par exemple, une exploration systématique à partir de a) permet d'éliminer les deux figures des faces adjacentes à celle du cercle (le carré et le double cercle) et d'envisager les 6 dispositions des trois autres figures sur les trois faces non visibles. puis de représenter ces 6 cubes en perspective (ou construire des patrons) en plaçant les figures sur les faces, selon les photos b) et c) :



1 2 3 4 5 6

1 ne convient pas d'après c), car ✳ est à côté de □.
2 ne convient pas d'après c), car ✚ est à côté de □.
3 convient, car a), b), et c) sont respectés.
4 ne convient pas d'après b), car ✧ est à côté de ◎.
5 ne convient pas d'après c), car ✳ est à côté de □.
6 ne convient pas d'après b), car ✳ est à côté de ◎.
La réponse est donc ✳

Attribution des points

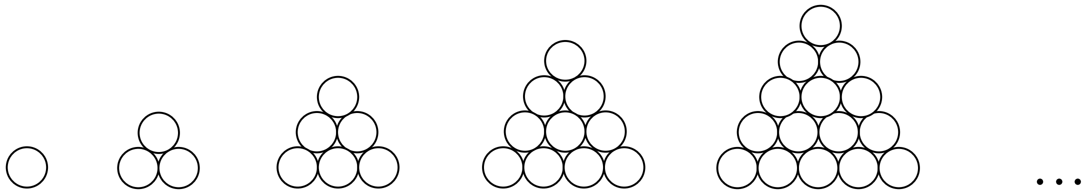
4 Réponse exacte : ✳ (étoile à 8 branches) avec explications ou dessin ou modèle
3 Réponse exacte, avec explications incomplètes ou dessin peu clair
2 Réponse erronée mais avec description d'une recherche complète mais partiellement juste
1 Réponse exacte sans aucune explication
ou début de recherche cohérente (patron incomplet, modèle sans symboles ...)
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Franche-Comté

9. JETONS EN TRIANGLES (Cat. 5, 6, 7)

Anne possède une boîte de 120 jetons ronds, tous identiques.
Elle les dispose sur sa table et forme une suite régulière « triangles », où les jetons sont placés les uns contre les autres. Voici ses cinq premiers triangles :



tr. 1 *tr. 2* *tr. 3* *tr. 4* *tr. 5* ...

Anne continue ainsi, en formant de nouveau triangles, qui ont toujours un rang de plus que le précédent. Au moment où elle termine un de ses triangles, elle constate que sa boîte est vide et qu'elle a utilisé les 120 jetons pour tous ses triangles.
Un peu plus tard, Pierino, le petit frère d'Anne, passe devant la table, observe les constructions de sa soeur. Il calcule ensuite le nombre de jetons dont il aurait besoin pour faire le triangle suivant. Comme il n'y a plus de jetons dans la boîte, il défait quelques triangles de sa soeur, utilise tous les jetons des triangles défaits et termine exactement le triangle qui vient juste celui qu'Anne avait construit en dernier.

Quels sont les triangles d'Anne que Pierino pourrait avoir utilisé complètement pour construire le sien ?

Montrez le détail de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et soustraction
- Fonctions : suites de nombres (triangulaires)

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il faut savoir quelle est la dernier triangle d'Anne afin de déterminer celui de Pierino.
- Imaginer, dessiner ou construire effectivement avec du matériel les triangles d'Anne pour vérifier combien elle en a fait pour utiliser les 120 jetons et combien il y en a dans sa dernière. Il faut donc comprendre la règle de passage de l'une à la suivante. Par exemple, voir que du 1e au 2e on a ajouté une ligne de 2 jetons, du 2e au 3e on a ajouté 3 jetons, ... voir qu'il en faudra 6 de plus pour le 6e, et noter la suite 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... qui donne les nombres de jetons des triangles successifs.
- Calculer le nombre total de jetons utilisés après 5, 6, 7 ... triangles pour savoir à quel moment on arrive à 120.
  les totaux partiels sont 1, 1+ 3 = 4 ; 4 + 6 = 10 ; 10 + 10 = 20 ; 20 + 15 = 35 (voir dessin), 35 + 21 = 56 (après la 6e) ; 56 + 28 = 84 (après le 7e) ; et finalement 84 + 36 = 120 pour les huit premiers triangles. (les nombres de jetons et les totaux partiels peuvent évidemment être disposés en tableau,...)
- Déterminer alors que la triangle de Pierino, le 9e, sera composé de 45 jetons.
- Il reste à trouver, parmi les nombres de la suite des huit premiers nombres de jetons par triangle : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, lesquels permettent de former une somme de 45 :
  - avec deux termes, ce n'est pas possible ;
  - avec trois termes, vu que 45 = 36 + 9, on peut constater que 9 = 6 + 3 et que **45 = 36 + 6 + 3** ;
  - avec quatre termes, on peut partir de la somme précédente, constater que 36 = 21 + 15 et que **45 = 21 + 15 + 6 + 3** ; mais qu'il y a encore une solution **45 = 1 + 6 + 10 + 28**
  - avec plus de quatre termes, il n'y a pas de solutions.
- Revenir aux constructions et répondre que Pierino a pu prendre les jetons des 2e, 3e et 18e triangles ou qu'il a aussi pu prendre ceux des 2e, 3e, 5e et 6e triangles ou encore ceux des 1e, 3e, 4e et 7e triangles

Ou : se baser sur des dessins, des manipulations, des essais numériques, des organisations de nombres en tableaux, etc.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (les trois possibilités 2^e, 3^e, 8^e ou 2^e, 3^e, 5^e, 6^e ou 1^a ,3^a ,4^a · 7^a triangles) avec détail des calculs

3 Réponse correcte et complète (les trois possibilités 2^e, 3^e, 8^e ou 2^e, 3^e, 5^e, 6^e ou 1^a ,3^a ,4^a · 7^a triangles), sans détails des calculs

ou réponse avec deux des trois possibilités ci-dessus et détails des calculs

ou réponses : 45 = 36 + 6 + 3 ; 45 = 21 +15 + 6 + 3 ; 45 = 28 + 10 + 6 + 1

2 Une seule des possibilités correctes, avec détail des calculs

ou deux possibilités sans détails des calculs

1 une possibilité sans détails

ou début de raisonnement : découverte de la dernière construction d'Anne (le 8e de 36 jetons), erreurs de calcul, ...

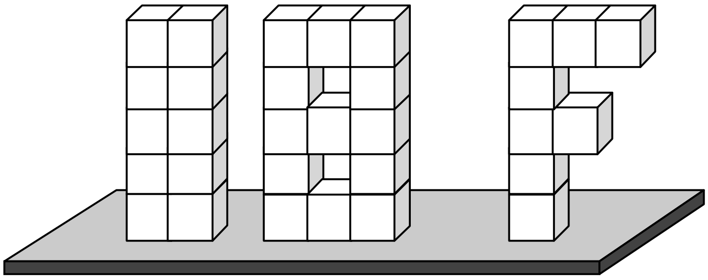
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Franche-Comté

10. FINALE DU 18E RMT (Cat. 5, 6, 7, 8)

En guise de trophée pour la finale du 18e RMT, Léo a construit les chiffres 1 et 8 et la lettre F en collant des cubes en polystyrène blanc, tous identiques qu'il a ensuite collés ensemble sur un socle. Voilà le résultat de son travail.



Après les avoir collés sur le socle, il a décidé d'embellir sa construction en recouvrant complètement le « 1, » le « 8 » et le « F » d'une couche uniforme de peinture rouge.
Pour peindre le « 1 », Léo a utilisé 48 cl de peinture rouge.

Quelle quantité de peinture rouge Léo a-t-il utilisé en tout pour peindre les trois parties ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : cube ; visualisation spatiale ; surface d'un solide
- Arithmétique : dénombrement, opérations, proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour chaque chiffre ou lettre, il faut s'intéresser à la surface des cubes qui composent le modèle en excluant les faces collées (et non au volume du modèle ou à son nombre de cubes).
- Compter les 32 faces à peindre du « 1 ». (Une à une ou, par exemple : 2 x 10 + 2 x 5 + 2, ou encore 60 – 28 qui est le nombre total de faces des 10 cubes moins le nombre de faces collées).
- Calculer la quantité de peinture employée pour peindre une face est égale à 1,5 cl (48 / 32).
- Observer ensuite que le chiffre « 8 » a 47 faces visibles et que la lettre « F » en a 33. Il y a ainsi 112 (47 + 33 + 32) faces à peindre et calculer qu'il faudra 112 x 1,5 = 168 cl de peinture rouge, (ou 47 x 1,5 + 33 x 1,5 + 48 = 168).

Ou, sans passer par le volume de peinture par face, utiliser la proportionnalité pour calculer la quantité totale nécessaire pour peindre les 112 faces, compte tenu que pour en peindre 32, il faut 48 cl de peinture répartie uniformément : 48 × 112/32 = 168 (en cl).

Attribution des points

4 Réponse correcte (168 cl de peinture rouge) avec des explications claires et complètes

3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes

2 Réponse correcte sans explications
ou réponse erronée due à une erreur de comptage des faces (dans l'une des pièces ou dans le total), mais avec un raisonnement correct ou à une erreur dans l'application de la proportionnalité

1 Début de raisonnement cohérent,
ou bien réponse erronée due à deux erreurs de comptage, ou de calcul
ou réponse erronée due à la prise en compte de toutes les faces des 31 cubes (186) sans tenir compte des collages (48 × 186/60 = 148,8) ou sans tenir compte des collages sur le socle (48 × 118/34 = 2832/17 ≈ 166,6)

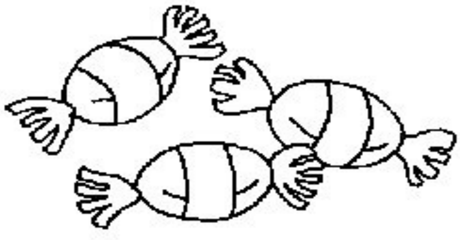
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Siena

11. LE PAQUET DE PAPILLOTES (Cat. 6, 7, 8)

Dans un paquet de papillotes, certaines sont bleues, certaines sont rouges et les autres sont vertes.



28 papillotes ne sont pas rouges

39 papillotes ne sont pas bleues.

31 papillotes ne sont pas vertes.

Combien y a-t-il de papillotes de chaque couleur dans le paquet ?
Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et soustraction
  Algèbre : système d'équations linéaires
  Logique ; négation

Analyse de la tâche

- Comprendre que comme les papillotes ne sont que de trois couleurs, et qu'il y en a plus de 39
  (1) les papillotes qui ne sont pas rouges sont bleues ou vertes et sont au nombre de 28 (B + V = 28)
  (2) de même il y a 39 papillotes rouges ou vertes (R + V = 39)
  (3) de même il y a 31 papillotes rouges ou bleues (B + R = 31).
- Procéder ensuite par essais et ajustements en fixant un nombre de papillotes d'une certaine couleur pour en déduire celui des autres couleurs selon les propositions (1), (2) et (3) en vérifiant qu'elles soient vraies toutes les trois. (Cette procédure peut venir de l'information sur l'ordre des nombres de papillotes de chaque couleur : R > V > B)
  Se rendre ainsi compte que la seule possibilité est R = 21, V = 18 et B = 10.

Ou remarquer qu'en ajoutant 28 + 39 + 31 = 98 on obtient deux fois le nombre total des papillotes, en déduire qu'il y a 98/2 = 49 papillotes dans le paquet et que 49 - 28 = 21 sont rouges, , 49 – 31 = 18 sont vertes. 49 – 39 = 10 sont bleues.

Ou, par une méthode « pré-algébrique », en désignant par B, V, R les nombres de papillotes bleues, rouges et vertes, résoudre le « système d'équations » B + V = 28, R + V = 39, B + R = 31 ; par exemple « par addition » comme ci-dessus ou, « par soustraction » en déduisant des deux premières que R vaut 11 (39 – 28) de plus que B puis en soustrayant 11 de 31 dans la troisième pour savoir que 2B = 20, ...

Attribution des points

4 Réponse correcte (21 R, 18V, 10 B,) avec explications claires et complètes de la démarche conduisant au résultat
3 Réponse correcte avec explications confuses de la démarche conduisant au résultat.
2 Réponse correcte sans explication
  ou réponse avec une erreur de calcul mais qui conserve le nombre total de papillotes avec explications
1 ou réponse avec une erreur de calcul mais qui conserve le nombre total de papillotes sans explication
  ou début de démarche correcte : par exemple quelques essais invalidés
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Bourg en Bresse et 11° RMT I.14 (Perroquets colorés)

12. SPORTS DIVERS (Cat. 6, 7, 8)

Jacques, Louis, François et Bernard sont quatre amis qui pratiquent chacun un seul des sports suivants : football, basket, escrime, volley.

- Jacques et l'ami qui joue au football sont deux passionnés de jazz,
- Louis et l'ami qui joue au basket n'aiment que la musique classique,
- François et l'ami qui joue au football vont souvent au cinéma ensemble,
- Louis déteste tous les sports qui utilisent une arme.

Quel sport pratique chacun des quatre amis ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Logique : négation, complémentaire; raisonnement hypothético déductif

Analyse de la tâche

- Des deux premières informations, comprendre que Jacques ne joue pas au football et que Louis ne joue pas au basket, mais qu'ils ont des amis qui jouent l'un au basket et l'autre au football. En plus, Louis ne peut pas jouer au football parce qu'il n'aime que le jazz. Ce sont donc ou François et Bernard qui pratiquent le football et le basket.
- De la troisième condition, François ne joue pas au football, il joue donc au basket et c'est Bernard qui joue au football.
- De la quatrième condition, on sait que Louis ne pratique pas l'escrime, alors il joue au volley et Jacques pratique l'escrime.

Ou : après avoir trouvé que Jacques ne joue pas au football, procéder par essais en faisant des hypothèses répétées sur ceux qui pratiquent les autres sports. Vérifier ensuite les autres conditions pour arriver soit à une contradiction soit à la solution.

Attribution des points

4 Solution correcte (François – basket ; Bernard – football ; Louis - volley ; Jacques - escrime) et bien justifiée

3 Solution correcte, avec une vérification seulement ou explications peu claires

2 Solution correcte sans explications

1 Début de raisonnement correct (par exemple, découverte que Jacques ne joue ni au football ni au basket)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Siena (d'un ancien problème du RMT 04.F.09, lui-même repris de FFJM)

13. AU SUPERMARCHÉ (Cat. 7, 8, 9, 10)

Deux amies, Claire et Anne, veulent aller faire des courses ensemble et ont décidé de se retrouver à l'entrée du supermarché à 10 h 05.
La montre de Claire retarde de 5 minutes, mais la jeune fille pense qu'elle avance de 6 minutes.
La montre d'Anne, en revanche, avance de 8 minutes mais la jeune fille pense qu'elle retarde de 4 minutes.
Les deux amies arrivent au supermarché en étant convaincues, chacune, d'être parfaitement à l'heure.

Qui arrive la première? A quelle heure?

Combien de temps avant l'autre ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Mesures : temps
- Arithmétique : addition et soustraction
- Logique

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que, si sa montre avance, on arrive avant l'heure déterminée et, au contraire, si sa montre retarde, on arrive plus tard.
- Déterminer que :

  quand il sera 10.05 à la montre de Claire, qui retarde de 5 minutes, il sera en réalité 10.10 (10.05 + 0.05). En lisant sa montre qui indique 10.05, Claire, qui croit qu'elle avance de 6 minutes, pense qu'il est 09.59. Il y a donc à ce moment 11 minutes d'écart (retard) entre l'heure pensée par C et l'heure réelle. Claire arrivera donc à 10.05 + 0.11 = 10.16.

  quand il sera 10.05 à la montre d'Anne, qui avance de 8 minutes, il sera en réalité 09.57 (10.05 - 0.08). En lisant sa montre qui indique 10.05, Anne, qui croit qu'elle retarde de 4 minutes, pense qu'il est 10.09. Il y a donc à ce moment 12 minutes d'écart (avance) entre l'heure pensée par Anne et l'heure réelle. Anne arrivera donc à 10.05 – 0.12 = 09.53.
- En conclure que A arrivera la première, à 9.53, avec une avance de 23 minutes sur Claire (10.16 - 9.53 = 0.23)

Ou, trouver l'heure d'arrivée de Claire à partir de celle du rendez-vous (10.05), ajouter 6 minutes pour l'avance présumée et les 5 minutes dues au retard effectif pour arriver ainsi à 10.16.

De même, trouver l'heure d'arrivée d'Anne à partir de celle du rendez-vous (10.05), retrancher 8 minutes pour le retard présumée et les 4 minutes dues à l'avance effective pour arriver ainsi à 9.53.

- Calculer la différence entre les deux (10.16 – 9.53 = 23 minutes).

Attribution des points

4 La solution exacte et complète (Anne, 09h53 avec 23 minutes d'avance) avec explications claires

3 La solution exacte et complète (Anne, 09h53 avec 23 minutes d'avance) avec explications incomplètes ou sans explications
ou solution incomplète (oubli des 23 minutes) mais avec explications complètes (heures d'arrivée des deux filles)
ou les trois réponses avec explications claires mais avec une seule erreur de calcul

2 Deux réponses correctes sur trois avec ou sans explications

1 La solution erronée (Claire, 09h54 avec 23 minutes d'avance) due à une confusion entre « retard » et « avance ».
ou une seule des trois réponses correctes
ou début de solution correct, par exemple avec le calcul d'un des éléments conduit correctement mais avec une réponse fausse

0 Incompréhension du problème

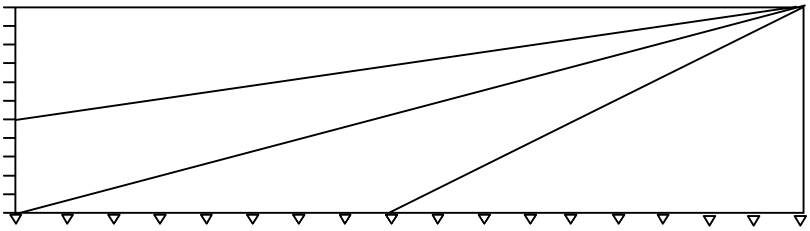
Niveaux: 7, 8. 9. 10

Origine: Ticino

14. UNE BELLE BANDEROLE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Pour la finale du Rallye Mathématique Transalpin, on veut réaliser une belle banderole avec le fameux logo RMT.

Pour dessiner le motif du fond, on a divisé la longueur du rectangle en 17 parties égales et la largeur en 11 parties égales, permettant de déterminer précisément les trois segments qui partagent le rectangle en quatre triangles.



Chacun des quatre triangles sera peint uniformément d'une couleur différente : jaune, bleu, vert et orange.
On décide d'utiliser des couleurs spéciales mais très chères, dont les prix dépendent de la couleur : le jaune est le plus cher, puis le bleu coûte un peu moins, le vert encore un peu moins et l'orange est le meilleur marché.

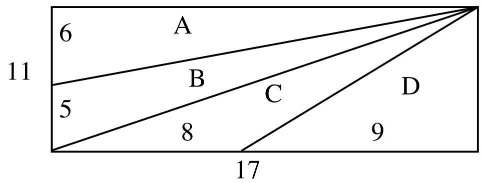
Comment faudra-t-il colorier chacun des triangles pour dépenser le moins possible ?

Expliquez votre réponse et coloriez les triangles.

ANALYSI A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : aire du triangle
- Mesures
- Arithmétique : comparaison de fractions



Analyse de la tâche

- Comprendre que pour dépenser le moins possible, il faudra peindre le triangle le plus grand avec la peinture la moins chère ainsi de suite...
- Comprendre ainsi qu'il faudra comparer les triangles selon leur aire.
- Pour les deux triangles C et D, observer que les mesures des deux bases (sur la longueur du rectangle) sont 9 et 8 en unités reportées sur la longueur. Comme ils ont la même hauteur, en déduire que l'aire de D sera supérieure à celle de C (bien que ce dernier ait des côtés plus longs).

  Le même raisonnement s'applique aux deux triangles A et B dont les mesures des bases sont 6 et 5 en unités reportées sur la largeur. Le triangle A aura une aire supérieure à celle de B.
- Pour comparer les aires des quatre triangles, se rendre compte qu'on a besoin d'une unité commune. Il y a alors plusieurs manières de s'en tirer :
  - imaginer le grand rectangle partagé en petits rectangles unités : 17 dans la longueur et 11 dans la largeur. L'aire du triangle rectangle D vaudra donc la moitié d'un rectangle de 9 x 11 rectangles unités, c'est-à-dire 99/2 ou 49,5. L'aire du suivant, C, vaudra, (par un raisonnement analogue mais faisant appel à la « formule » de l'aire d'un triangle) 8 x 11/2 = 88/2 = 44. Selon le même pavage en rectangles unités, le triangle A a une aire de (6 x 17)/2 = 51 et B a une aire de (5 x 17)/2 = 42,5 ;
  - avec des rapports en prenant le grand rectangle comme unité, les aires des quatre triangles (depuis la droite) sont les moitiés de 9/17, de 8/17, de 5/11 et de 6/11. Il ne reste qu'à comparer ces quatre fractions en les mettant par exemple au même dénominateur : 99/187 ; 88/187 ; 85/187 et 102/187 ;
  - par un calcul algébrique, en désignant par a et b les mesures en cm des unités choisies sur la longueur et sur la largeur du rectangle, exprimer les aires des quatre triangles :

    A. $(6b \times 17a)/2 = 51ab$; B. $(5b \times 17a)/2 = 42{,}5ab$; C. $(8a \times 11b)/2 = 44ab$; D. $(9a \times 11b)/2 = 49{,}5ab$.

Ou :calculer les aires des quatre triangles après avoir pris les mesures nécessaires à la règle (mais trouvant alors des mesures approximatives).

Choisir en conséquence la couleur la moins chère pour le plus grand triangle, orange et ainsi de suite. On arrive ainsi aux couleur A en orange, B en jaune, C en bleu et D en vert.

Attribution des points

4 Réponse correcte (A en orange, B en jaune, C en bleu et D en vert) avec explications complètes

3 Réponse correcte avec explications incomplètes

2 Comparaison correcte des aires seulement, pour les deux couples de triangles de même hauteur, avec explications
ou réponse avec une interversion entre deux couleurs due à une erreur de calcul

1. Réponse correcte sans explication
ou réponse « A vert, B, bleu, C jaune et D orange correspondant à la dépense maximale

0 Incompréhension du problème

Niveaux: 7, 8, 9, 10

Origine: Cagliari e Parma

15. TRIANGLE CÉLÈBRE (Cat 7, 8, 9, 10)

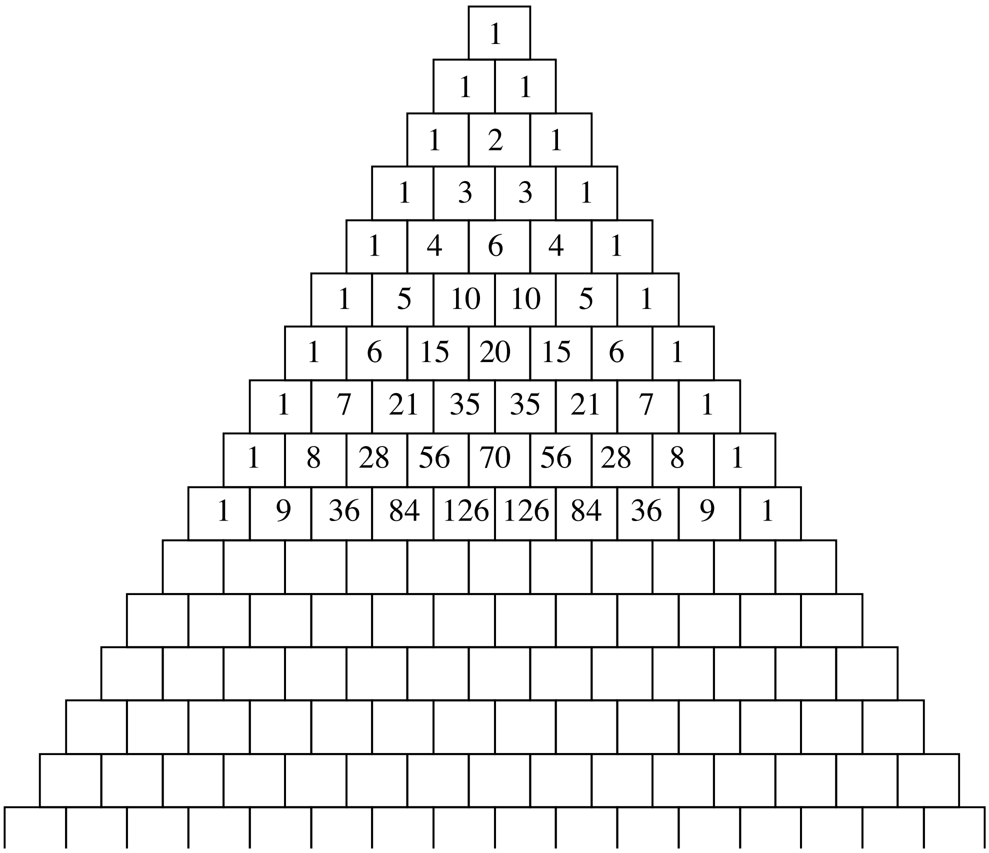
La figure qui suit, en forme de triangle, était déjà bien connue des mathématiciens des siècles passés (Jia Xian en Chine, 11e siècle ; Tartaglia en Italie, 16e siècle ; Pascal en France, 17e siècle).
Chacune des cases contient un nombre déterminé ainsi :
- dans la première et la dernière case de chaque ligne : le nombre 1
- dans chacune des autres cases : la somme des nombres des deux cases situées au-dessus.

Jules et Angèle décident de colorier en rouge les cases qui contiennent un nombre pair et de laisser en blanc celles qui contiennent un nombre impair.
Jules dit:

« Il y a peu de cases rouges dans ce triangle, je n'en ai trouvé qu'une seule sur les dix cases du triangle formé par les quatre premières lignes en partant du haut. »

Angela dit:

« Oui, mais la proportion des cases rouges augmente. J'ai trouvé qu'un quart des cases du triangle formé des huit premières lignes sont rouges. »



Si vous continuez, ligne par ligne, à colorier en rouge les cases qui contiennent un nombre pair, trouverez-vous un triangle où plus de la moitié des cases sont rouges ?

Si oui, à partir de quelle ligne, en partant du haut ?

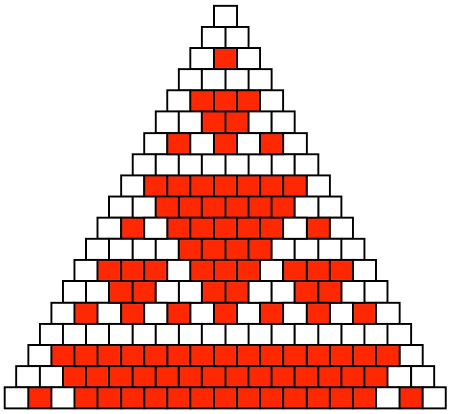
Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : régularités numériques (nombres triangulaires)
- Fonctions : suites

Tâche de l'élève



- Compléter le triangle par les nombres des lignes suivantes, colorier les cases des nombres pairs, compter les cases rouges et blanches et se rendre compte qu'il faut prolonger le triangle jusqu'à la 19e ligne pour obtenir plus de cases rouges que de blanches (99 et 91) (Cette procédure est longue et peut conduire à des erreurs.)

Ou : commencer par colorier les cases rouges des premières lignes, puis calculer les nombres manquants dans les lignes suivantes.

- Découvrir les premières régularités de la répartition des nombres pairs, disposés en triangles.
- Constater éventuellement qu'il n'est plus nécessaire de calculer les nombres mais qu'on peut déterminer la parité d'après les nombres de la ligne précédente : « pair (rouge) + pair (rouge) –> pair (rouge) ; « pair (rouge) + impair (blanc) –> impair (blanc) etc.).
- Approfondir son observation de la disposition des cases rouges par triangles par des répétitions (fractales)
- Émettre des hypothèses sur la croissance du rapport : nb cases rouges/nb total de cases et les vérifier. On remarque que la croissance n'est pas monotone, mais cependant on pense qu'elle est limitée après les calculs sur les premières lignes. On arrive cependant déjà à 40% à la 10e ligne.
- Prolonger le triangle vers le bas, colorier et compter de manière organisée les cases pour découvrir qu'à la 19e ligne le rapport cases rouges / nombre total de cases dépasse les 50%.

Exemple de tableau organisé :

no de la ligne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
nb cases rouges	0	0	1	0	3	2	3	0	7	6	7	4	9	6	7	0	15	14	15	12
nb cumulé rouges	0	0	1	1	4	6	9	9	16	22	29	33	42	48	55	55	70	84	99	111
nb cumulé cases	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210
rapport (appr.)	0	0	1/6	0,1	4/15	...	...	...	...	0,4	...	...	...	...	...	...	0,46	0,49	0,52	0,53

Attribution des points

4 Réponse exacte (« oui », à partir de la ligne 19), calculs (comptage sur dessin ou tableau)

3 Réponse exacte, mais avec explications peu claires

2 Réponse « oui », mais avec une erreur sur la ligne, due à des erreurs de comptage, avec explications cohérentes
ou la ligne n'est pas indiquée, mais coloriage exact et complet jusqu'à la 19 e ligne au moins (modèle correct du « tapis »)

1 Réponse « non », mais avec un début d'analyse (calculs n'allant pas jusqu'à la ligne 19)
ou seulement un coloriage correct des 16 premières lignes du triangle

0 Incompréhension du problème ou seulement la réponse « oui », sans coloriage

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Les napperons de Sierpinski, adapté par fj

16. TAPIS DE CARTES (Cat. 8, 9, 10)

On veut recouvrir un tapis rectangulaire de 50 cm sur 40 cm avec des cartes à jouer de 11 cm sur 7 cm. Le tapis doit être complètement recouvert et les cartes ne doivent pas dépasser les bords. Ainsi, il est possible, que certaines cartes se superposent partiellement (car on n'utilise que des cartes entières).

Quel est le nombre minimum de cartes dont on aura besoin pour recouvrir entièrement le tapis ?

Dessinez votre solution.

ANALYSE A PRIORI

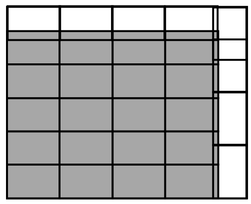
Domaine de connaissances

- Arithmétique
- Géométrie, pavages et mesures d'aires

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la solution du problème ne peut pas s'obtenir seulement par des calculs d'aires, mais qu'il s'agit de trouver une disposition des cartes.

  (Le quotient de l'aire du tapis, 2000 cm^2, par l'aire d'une carte, 77 cm^2 est un nombre rationnel non entier - 2000/77 = 25,97... - dont on ne peut tirer qu'une estimation sur le nombre de cartes, qui doit être inférieur ou égal à 25 et supérieur ou égal à 26. Mais il s'agit d'une condition, qui, si on peut la considérer comme nécessaire, n'est pas suffisante. Il suffit d'imaginer un rectangle équivalent, de 4 cm sur 500 cm pour se rendre compte qu'on ne pourrait y placer aucune carte sans dépasser les bords.)
- Remarquer que la disposition immédiate (voir figure) suivante comporte 28 cartes, avec 8 cartes chevauchant partiellement d'autres. Pour faire mieux, il faut donc essayer de recouvrir le tapis avec seulement 26 ou 27 cartes.



- Comprendre que le recouvrement en un minimum de cartes revient à placer le plus possible de cartes (qui ne se superposent pas) dans le tapis puis à « boucher les trous ».

  Une stratégie possible est d'essayer d'occuper les bords du rectangle sans chevauchements.
- Se rendre compte que ni 11, ni 7 ne sont des diviseurs de 50 et de 40 et qu'il faut abandonner l'idée de placer toutes les cartes dans la même « direction » ou par rangs complets, ce qui laisserait des bords libres et ne permettrait évidemment pas d'arriver à une solution optimale (*figures 1 et 2*). Il faut percevoir que 40 et 50 peuvent se décomposer en sommes de multiples de 11 et de multiples de 7 (50 = 28 + 22 et 40 = 33 + 7) (*figure3*) puis imaginer que, par symétrie centrale, on peut recouvrir les quatre bords (*figure 4*)

  On peut arriver aux mêmes constatations par un dessin (par exemple sur quadrillage) ou par manipulation après découpage de cartes.

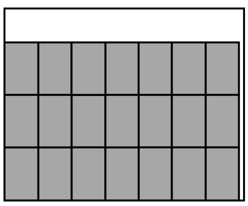


fig. 1

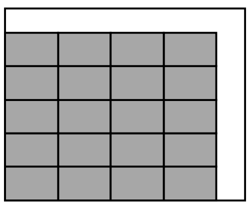


fig. 2

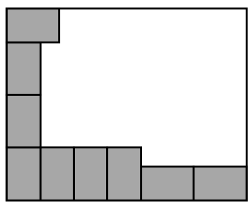


fig. 3

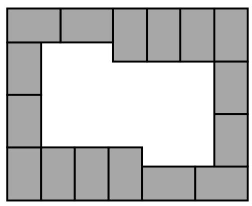


fig. 4

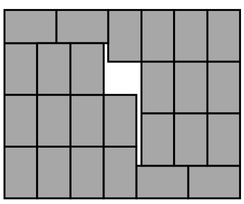


fig. 5

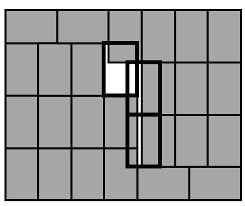


fig. 6

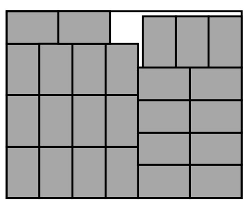


fig. 7

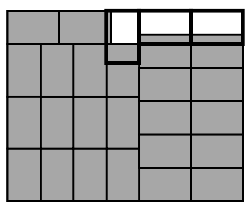


fig. 8

- Poursuivre le remplissage à partir des bords, pour arriver au point où l'on ne peut plus ajouter de cartes (comme dans l'exemple de la *figure 5*) et dénombrer les cartes placées. (25). À ce moment, on peut éventuellement se rapporter au calcul des aires pour constater qu'on a atteint le maximum de 25 cartes.

- Observer les « trous à boucher » et constater que, même si leur aire ne dépasse pas celle d'une carte, il a des « fentes » qui ne peuvent pas être recouvertes par une seule carte et nécessitent trois cartes (*figure* 6). On arrive alors à un total de 28 cartes pour recouvrir le tapis, comme pour la « disposition immédiate ».

  Essayer alors de disposer les 25 cartes dans des dispositions plus favorables (*figure 7*) et constater qu'il faut toujours trois cartes pour « boucher les trous ».

- Vu que la surface des trous est inférieure à celle d'une carte et qu'il faut de toute manière trois cartes pour « boucher les trous » supposer qu'il y a un « gaspillage » en voulant absolument placer 25 cartes sans superposition. Tenter encore, alors, de « boucher les trous » à partir de 24 cartes et découvrir que trois cartes permettent aussi de compléter les trous même s'ils sont plus grands (par exemple, *figure* 8). On arrive ainsi à un recouvrement optimal du tapis en 27 cartes.

  (Ces recherches de solutions optimales peuvent se faire sur papier quadrillé ou par manipulation avec des rectangles découpés. Les opérations arithmétiques passent ici au second rang.)

Attribution des points

4 Une solution optimale (27 cartes) avec croquis sur lequel on distingue clairement les 27 cartes

3 Une solution non optimale (28 cartes) avec croquis, correct sur lequel on distingue les 28 cartes
ou une solution en 27 cartes où les cartes ne se distinguent pas clairement sur le croquis

2 Une solution non optimale (29 cartes) avec croquis correct sur lequel on distingue 29 cartes
ou une solution mentionnant 28 cartes avec croquis sur lesquels on ne les distingue pas clairement

1 Une solution avec croquis correct sur lequel on distingue 30 ou 31 cartes
ou solutions avec croquis peu clairs mentionnant 29 cartes
ou l'indication sur le dessin de la décomposition de 50 en 28 + 22 et 40 en 33 + 7 conduisant recouvrement complet le bord sans superposition

0 Une solution mentionnant 26 cartes (sur la base de la division 5000 : 77) sans croquis
ou croquis avec erreurs dans les dimensions des figures, ou incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Luxembourg + fj

17. TIC TAC (Cat. 8, 9, 10)

Les habitants de Transalpie sont très précis et aiment beaucoup les horloges qu'ils mettent dans toutes les pièces de leur maison, de la cave au grenier. Ils les entretiennent et les remontent avec soin.

Le dernier recensement a permis de savoir qu'au 1er janvier 2010, il y a 34 532 377 habitants en Transalpie, répartis en 12 345 678 foyers.

Dans chaque foyer, il y a en moyenne 15 horloges, qui font tic ou tac à chaque seconde.

On entendra donc un très grand nombre de tic et de tac en Transalpie durant l'année 2010 !

Par combien de chiffres « 0 » se terminera ce nombre ?

Quel sera le dernier chiffre différent de « 0 » de ce nombre ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, décomposition en facteurs, numération en base 10

Analyse de la tâche

- Déterminer les grandeurs et opérations qui permettront de calculer le nombre de tics et de tacs :
  le nombre de foyers, les 15 horloges par foyer, les 365 jours de 2010, les 24 heures de chaque jour, les 3 600 secondes de chaque heure, conduisant au produit 12 345 678 × 15 × 365 × 24 × 60 × 60.
- Se rendre compte qu'une calculatrice n'affiche pas tous les chiffres de ce produit et qu'elle n'en donne qu'une approximation et un ordre de grandeur sous forme de puissances de 10. Par exemple, sur un affichage de 14 chiffres : 5.83999952E-15 et qu'il faudra soit scinder le calcul en plusieurs phases, soit rechercher le nombre de facteurs 10 du produit en recherchant les facteurs 2 et 5 qui le composent.
- Décomposer par exemple chacun des facteurs : 12 345 678 = 2 × 6 172 839 ; 15 = 5 × 3 ; 365 = 5 × 73 ; $24 = 2^3 \times 3$; $3600 = 2^4 \times 5^2 \times 9$ et constater que le produit cherché est
  $6\,172\,839 \times 3 \times 73 \times 9 \times 3 \times 5^4 \times 2^8 = 6\,172\,839 \times 73 \times 81 \times 2^4 \times 10^4$, ce qui permet de dire que le produit se terminera par 4 zéros.
- Comme certaines calculatrices n'affichent pas tous les chiffres du produit $6\,172\,839 \times 73 \times 81 \times 2^4$ il faut chercher d'une autre manière son chiffre des unités, à partir des chiffres des unités de chaque facteur. Trouver alors que le dernier chiffre de 3 × 3 × 1 × 8 = 72 est 2.
  (Il existe encore de nombreuses autres manières de décomposer les nombres en facteurs premiers qui permettent de faire apparaître les quatre « 0 » de 10000 et le dernier chiffre non nul « 2 ».)

Ou, comprendre que pour déterminer les derniers chiffres il suffit de calculer partiellement les deux produits, a = 12345678 × 15, qui se termine par 170 et b = 3600 × 24 × 365, qui se termine par 36000 ; les derniers chiffres de $a \times b$ s'obtiendront par le calcul du produit de 36000 et 170 (ou de 36 et 17 en notation scientifique qui indique le nombre des « 0 ») qui donne 20000.

- Formuler la réponse : le nombre des tic ou tac se terminera par quatre « 0 » précédés d'un « 2 » et donner les explications nécessaires.

Attribution des points

4 Réponse correcte complète (quatre « 0 » précédés d'un « 2 ») avec explications complètes (suite des décompositions ...)

3 Réponse correcte et complète, avec explications incomplètes

2 Réponse correcte et complète, sans explications
ou réponse correcte à une seule question, avec explications

1 Début de raisonnement cohérent

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Reprise de 17.1.16 *Factorielles*

18. LES VACANCES (Cat. 9, 10)

Sylvie, Michel, Vincent et François partent en vacances et voyagent ensemble. Chacun roule avec sa propre moto dont il connaît bien la consommation :
- La moto de Sylvie parcourt en moyenne 150 km avec 13 litres d'essence.
- Michel a remarqué que sa moto consomme 7 litres d'essence pour 84 km.
- Vincent sait que sa moto consomme 10 litres d'essence pour 125 km.
- La moto de François parcourt en moyenne 240 km avec 20 litres d'essence.

Ils ont une carte de crédit commune pour acheter l'essence qu'ils utilisent depuis leur départ, pour faire le premier plein, jusqu'à la fin du voyage. À leur retour, ils constatent qu'ils ont consommé 1200 litres, en tout, pour un montant de 1500 euros.

Combien payera chacun pour l'essence qu'il a consommée.

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : proportionnalité, fractions

Analyse de la tâche

- Identifier les deux grandeurs en jeu dans le problème, la quantité d'essence et les distances parcourues, se rendre compte que les relations entre ces grandeurs sont différentes d'une moto à l'autre et qu'on aura, en fait, quatre situations différentes à traiter pour établir le partage.
- Comprendre qu'il faudra calculer la quantité d'essence consommée par chacun pour une même distance afin de les comparer. Par exemple, en litres par km, ces consommations sont :

  S : 13/150 M : 7/84 = 1/12 V : 10/125 = 2/25 F : 20/240 = 1/12
- Additionner ces quatre consommations personnelles pour obtenir la consommation totale des quatre motos pour une même distance en litres par km : 13/150 + 1/12 + 2/25 + 1/12 = 1/3 ou par passage en fractions de mêmes dénominateurs, en litres par 300 km : 26/300 + 2 x 25/300 + 24/300 = 100/300

  Calculer la distance totale parcourue : à partir de 1 litre pour 3 km ou de 100 litres pour 300 km, on arrive à 1200 litres pour 3600 km.
- Pour la répartition, on peut calculer la consommation de chacun pour la distance de 3600 km. On obtient ainsi, par exemple par le recours au rapport de proportionnalité, en litres pour les 3600 km :

  S : (13/150) x 3600 = 312 M et F : (1/12) x 3600 = 300 V : (2/25) x 3600 = 288

  et répartir 1500 euros en quatre parts proportionnelles à 312, 300, 300 et 288 :

  Pour Sylvie : 312 x (1500/1200) = 390 ; pour Michel et François : 300 x (1500/1200) = 375 ; pour Vincent : 288 x (1500/1200) = 360

Ou, sans connaître la distance ni les consommations, répartir directement les 3500 euros en quatre parts proportionnelles aux consommations pour 300 km : 26, 25, 25 et 24

ce qui donne avec le facteur 15 permettant de passer de à 100 litres (pour 300 km) à 1500 euros :

S : 15 x 26 = 390, M et F : 15 x 25 = 375 V : 15 x 24 = 360

Ou : Calculer le prix de la benzine au litre 1500 /1200 = 1,25 euro par litre; déterminer la consommation de chacun pour 3600 km comme précédemment S : 312 ; M e F : 300 ; V : 288; et calculer la dépense de chacun en multipliant par le prix de l'essence : S : 312 x 1,25 = 390 M e F = 300 x 1,25 =375 V = 288 x 1,25 = 360.

Attribution des points

4 Les quatre montants corrects (Sylvie 390, Michel et François 375, Vincent 360, en euros), avec explications claires et complètes

3 Les quatre montants corrects, avec explications incomplètes ou confuses

ou : une seule erreur de calcul pour l'un des montants, avec explications claires et complètes

2 Les quatre montants corrects sans explication

ou un ou deux montants, avec explications

ou répartition non proportionnelle des quatre parts due à d'une erreur de calcul

1 Début de raisonnement correct (somme des consommations pour une même distance, ...)

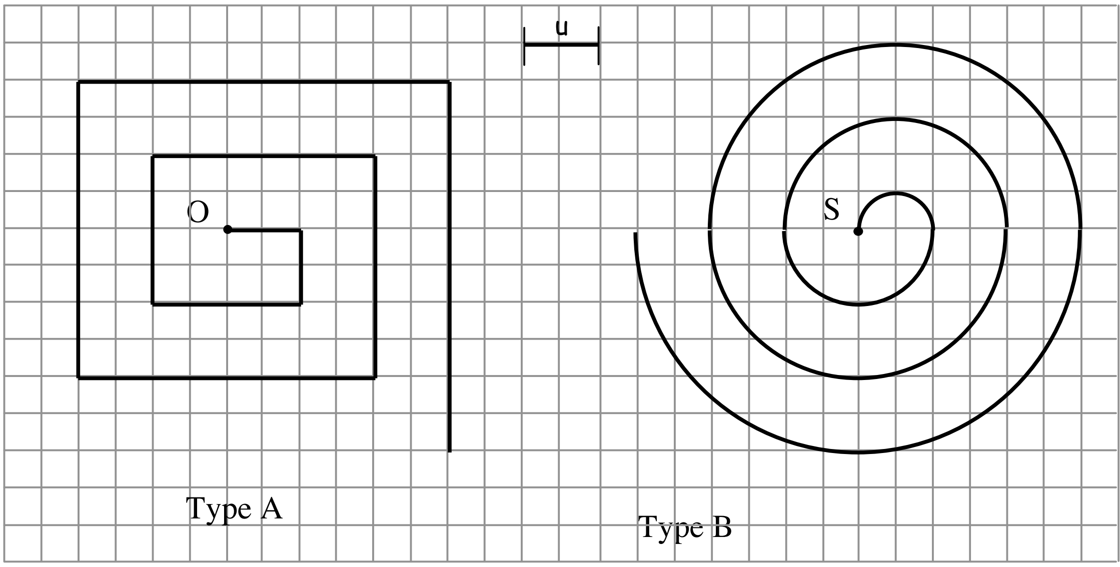
0 Incompréhension du problème

Niveaux: 9, 10

Origine: Lodi

19. SPIRALES (Cat. 9, 10)

On a dessiné ici deux spirales différentes. L'une est formée de segments successifs, l'autre est formée de demi-cercles successifs.



La spirale de gauche (de type A) est construite à partir du point O, elle est formée de 10 segments et a une longueur de 30 unités.
La spirale de droite (de type B) est construite à partir du point S, elle est formée de 6 demi circonférences.

Quel est le nombre minimum de segments nécessaires pour former une spirale de type A plus longue qu'une spirale de type B formée de 30 demi circonférences.

Donnez votre réponse et expliquez votre raisonnement.

ANALYSI A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: recherche de régularités dans une séquence de nombres, somme des premiers nombres naturels, approximations par défaut et par excès
- Géométrie : cercle et longueur
- Algèbre : idée de fonction

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de construction des spirales et voir comment les poursuivre par adjonctions de segments ou de demi circonférences.
- Comprendre qu'il s'agit de déterminer les longueurs des spirales des deux types et que ces mesures dépendent du nombre de segments et de demi circonférences (sont fonction de ce nombre).
- Calculer les longueurs de la spirale de type A en observant les premiers segments dessinés et les noter de manière organisée (comme par exemple dans le tableau ci-dessous).

nb segments	***1***	2	***3***	4	***5***	6	***7***	8	***9***	10	***11***	…
longueur	***1***	2	***4***	6	***9***	12	***16***	20	***25***	30	***36***	

et chercher à trouver des liens entre les nombres des deux suites, selon leur parité par exemple.

Découvrir que, si le nombre des segments est impair (en désignant par $2n+1$ le nombre de segments), la longueur totale, en unités u, est le carré de la moitié du « nombre de segments + 0,5 » (ou $(n+1)^2$ en notation algébrique)alors que, pour les nombres pairs de segments, la longueur totale est le produit de la moitié du nombre de segments par « un de plus que cette moitié » (ou $n(n+1)$ en notation algébrique).

nb segments	***1***	2	***3***	4	***5***	6	***7***	8	***9***	10	***11***	…	2n	***2n+1***	…
longueur	***1***	2	***4***	6	***9***	12	***16***	20	***25***	30	***36***		n(n+1)	***(n+1)²***	…

Ou, par voie arithmétique, si le nombre de segments est pair, la longueur des spirales successives s'obtient par la somme suivante : $1+1+2+2+3+3+\ldots+n+n = 2(1+2+3+\ldots+n) = 2\,\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$;

si, le nombre est impair, c'est-à-dire de la forme

$2n+1$, on a: $1+1+2+2+3+3+\ldots+n+n+(n+1) = 2\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = n(n+1)+(n+1) = (n+1)^2$.

- Calculer les longueurs de la spirale de type B en observant les premières demi circonférences et constater que leurs rayons augmentent régulièrement : 1/2 u, 1u, 3/2 u, 2 u,… , (n/2) u, … . En déduire qu'une spirale de type B, constituée de *n* demi circonférences a une longueur de:

  $\pi/2 + \pi + (3/2)\pi + 2\pi + \ldots + (n/2)\pi = \pi/2(1+2+3+\ldots+n) = (\pi/2)[n(n+1)/2] = (\pi/4)[n(n+1)]$.

  et éventuellement arriver à la formula $L_B(n) = (\pi/2)[n(n+1)/2] = (\pi/4)[n(n+1)]$.
- Trouver que la longueur d'une spirale de 30 demi circonférences est, en unité u :

  $L_B(30) = (1 + 2 + 3 + \ldots + 30)\,\pi/2 = 232{,}5\,\pi$ (et éventuellement en utilisant la formule $(\pi/4)\cdot 30\cdot 31 = 232{,}5\pi$); considerando poi che $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, si ottiene che $\boldsymbol{730{,}05 < L_B(30) < 732{,}375}$.

  $L_B(30) = (\pi/4)\cdot 30\cdot 31 = 232{,}5\,\pi$; en considérant que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, on obtient $\boldsymbol{730{,}05 < L_B(30) < 732{,}375}$.
- Comprendre qu'il faut trouver une spirale de type A dont la longueur est supérieure à 733 puis revenir à son nombre de segments.
- À partir, par exemple, des carrés des nombres impairs, constater que le plus proche de 733 est $27^2 = (n+1)^2 = 729$ (et que $29^2 = 841$), correspondant à une spirale de type A de $2n+1 = 2\cdot 26 + 1 = 53$ segments. Donc il faut passer à la spirale de type A de $54 = 2n$ segments et vérifier que sa longueur est $27\cdot 28$ (= n(n+1)) = ***756*** (> 732,375).
- Conclure que la spirale de type A recherchée est celle de 54 segments.

Attribution des points

4 Réponse correcte (54 segments) avec explications complètes

3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires

2 Réponse correcte sans explications
ou réponse erronée due à une faute de calcul, mais avec un raisonnement correct

1 Début cohérent de recherche (par exemple compréhension du lien entre le nombre de segments et la longueur de la spirale de type A)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Siena