19ème Rallye Mathématique Transalpin, épreuve finale

	Problèmes	Catégories								Domaines*				
1.	Les images	3								Ar				
2.	Les jetons	3	4							Ar				
3.	Des carrés de carrés	3	4							Ar		Géo		Co
4.	La balance à plateaux	3	4	5						Ar			Lo	
5.	Tir à la cible à Lunapark	3	4	5						Ar				
6.	Le boulier		4	5						Ar				
7.	La rue des Jardins		4	5	6					Ar				
8.	Les bornes de la via Aurelia			5	6					Ar				
9.	Puissance 4			5	6							Géo	Lo	
10.	Partages			5	6	7						Géo		Co
11.	La cloche de Transalpie				6	7				Ar				
12.	Le réseau hexagonal de Rosalie				6	7	8					Géo	Lo	Co
13.	Le parcours				6	7	8	9		Ar	Alg			
14.	L'âge du professeur					7	8	9	10	Ar			Lo	
15.	Cadeau d'anniversaire					7	8	9	10	Ar	Alg			
16.	Les carrés de Joseph					7	8	9	10	Ar		Géo		
17.	La spirale						8	9	10	Ar	Alg	Géo		
18	La cave de Transalpie						8	9	10	Ar	Alg			
19.	Le code de Toni							9	10	Ar	Alg			
20.	Carrés et disques								10	Ar		Géo		

* Ar : Arithmétique Alg : Algèbre
Géo : Géométrie Lo : Logique
Co : Combinatoire

1. LES IMAGES (Cat. 3)

Sébastien a 13 images à répartir dans trois boîtes : une boîte jaune et deux boîtes rouges.

Aucune boîte ne doit être vide.

Chacune des deux boîtes rouges doit contenir le même nombre d'images.

Comment Sébastien peut-il répartir toutes les images dans les boîtes ?

Indiquez toutes vos solutions.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Arithmétique : addition

Analyse de la tâche :

- Trouver des décompositions de 13 qui satisfont les contraintes du problème, par essais et ajustements, en s'aidant éventuellement d'un schéma.

Ou : Remarquer que la boîte jaune ne peut contenir qu'un nombre impair d'images (donc 1, 3, 5, 7, 9 ou 11) puis compléter en mettant des images dans la boîte rouge.

Ou : Placer un même nombre d'images dans chaque boîte rouge, calculer le nombre d'images restant à placer et les placer dans la boîte jaune.

- Vérifier que toutes les solutions ont été trouvées en procédant à un inventaire organisé et exprimer la réponse :

Dans la boîte jaune	1	3	5	7	9	11
Dans chaque boîte rouge	6	5	4	3	2	1

Attribution des points :

4 Les 6 solutions ci-dessus sont trouvées et présentées clairement

3 Réponse incomplète : 4 ou 5 solutions, sans solution erronée
ou 6 solutions correctes mais avec 1 ou 2 solutions incorrectes

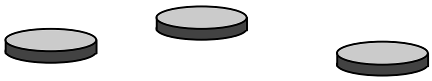
2 Réponse incomplète : 2 ou 3 solutions correctes, sans solution erronée
ou plus de 3 solutions correctes mais 3 ou 4 solutions incorrectes

1 Une seule solution correcte sans solution incorrecte
ou au moins 2 solutions correctes mais avec d'autres solutions incorrectes

0 Incompréhension du problème

2. LES JETONS (Cat. 3, 4)

Voici trois jetons.



Chacun d'eux porte un nombre, mais on ne le voit pas car il est écrit sur la face cachée.
On sait que :

- en ajoutant 6 au nombre du premier jeton, on trouve le nombre du deuxième jeton ;
- en ajoutant 6 au nombre du deuxième jeton, on trouve le nombre du troisième jeton ;
- si on additionne les trois nombres, on trouve 63.

Quels sont les nombres écrits sur les jetons ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations avec des nombres naturels

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a trois nombres qui « vont en augmentant de 6 en 6 »
- Choisir trois nombres qui vont de 6 en 6, en faire la somme et la comparer à 63, puis procéder par ajustements, en contrôlant la somme. Pour limiter les essais, on peut observer que les sommes vont de 3 en 3 et, par exemple, à partir de 10 + 16 + 22 = 48, 11 + 17 + 23 = 51 … constater qu'on arrivera à 63 en 4 pas : 54, 57, 60, 63.

Ou : choisir trois nombres qui vont de 6 en 6, (par exemple 9, 15, 21) en faire la somme (dans l'exemple 45), faire la différence avec 63 (dans l'exemple 18) et ajouter 6 (le tiers de 18) à chaque nombre essayé, ce qui donne la suite cherchée (15, 21, 27).

Ou : procéder de façon systématique, en commençant par la suite 1, 7, 13, puis 2, 8, 14, puis 3, 9, 15… en calculant chaque fois la somme jusqu'à obtenir une somme égale à 63.

Ou : partir du quotient 63 : 3 = 21, et, par essais successifs, en ajoutant 6 ou retranchant 6, aboutir à 15, 21 et 27.

Ou : constater que le plus grand nombre vaut 12 de plus que le plus petit et, tenant compte que le deuxième vaut 6 de plus que le petit, voir que la somme des écarts est 18. Retrancher 18 et diviser par 3 pour trouver le plus petit nombre 63 – 18 = 45 et 45 : 3 = 15. Cette démarche est très improbable pour les niveaux considérés.

Il y a de nombreuses autres procédures ou disposition des calculs qui permettent d'arriver à la solution

Attribution des points

4 Réponse correcte (15, 21 et 27) avec le détail de la suite des calculs ou des essais effectués

3 Réponse correcte, avec explications confuses mais non erronées ou en vérifiant seulement que la somme est 63

2 Réponse correcte, sans explications
ou réponse fausse obtenue avec une procédure correcte, mais avec des erreurs de calcul

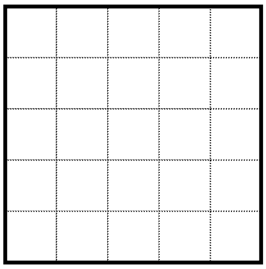
1 Réponse fausse avec cependant soit une somme égale à 63 (dont au moins deux termes ont pour écart 6), soit une succession de nombres qui vont de 6 en 6

0 Incompréhension du problème.

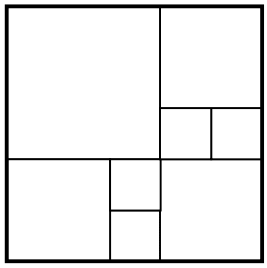
3. DES CARRES DE CARRES (Cat. 3, 4) ©ARMT 2011 – 19e – épreuve Finale

Avec les 25 petites cases carrées de la première grille, on peut former 8 carrés, comme le montre la deuxième grille.

première grille



deuxième grille

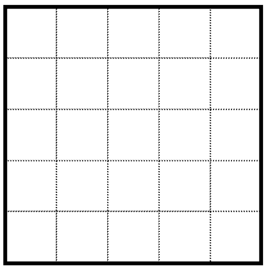


Avec les 25 cases de la première grille, comment peut-on former 10 carrés qui recouvrent exactement la grille ? Et comment peut-on former 13 carrés ?

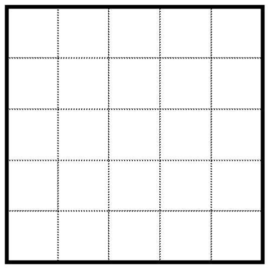
Dessinez les 10 carrés que vous avez trouvés sur la troisième grille et les 13 carrés sur la quatrième grille.

Vous pouvez colorier les carrés de couleurs différentes pour qu'on les distingue bien.

troisième grille



quatrième grille



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

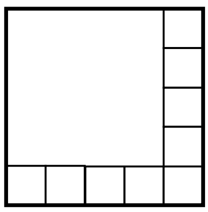
- Géométrie : pavages
- Arithmétique : relations entre les nombres

Analyse de la tâche

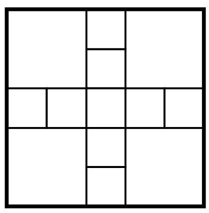
- Comprendre qu'il s'agit de décomposer la surface totale en utilisant seulement des assemblages de petits carrés ayant eux-mêmes une forme carrée.
- Comprendre que les carrés formés peuvent comporter 1, 4, 9 ou 16 petits carrés.
- Essayer de chercher les combinaisons en partant de la plus grande surface carrée possible : 25 + 0 ; 16 + 9 × 1 ; etc.

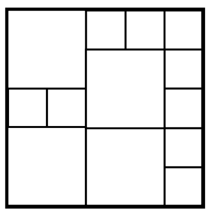
Ou : faire des essais en dessinant

Exemples de réponses : 10 carrés



13 carrés





Attribution des points

4 Les deux combinaisons trouvées (10 carrés avec 1 carré de 4 × 4 et 9 carrés de 1 × 1 et 13 carrés avec 4 carrés de 2 × 2 et 9 carrés de 1 × 1), les dispositions pouvant varier, avec des dessins clairs

3 Une combinaison trouvée, sans combinaison erronée

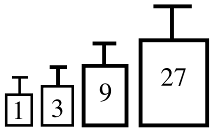
2 Une combinaison trouvée et une autre ne respectant pas les contraintes

1 Essais de combinaisons avec des carrés, mais sans aboutir

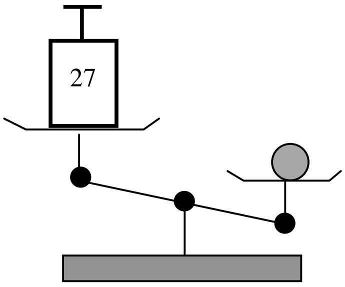
0 Incompréhension du problème (par exemple, dessins ne comportant pas que des carrés)

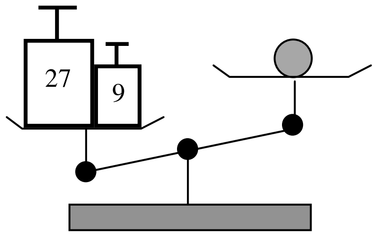
4. LA BALANCE A PLATEAUX (Cat. 3, 4, 5)

Julie place une boule sur le plateau d'une balance et elle essaie de trouver combien elle pèse, en utilisant quatre masses marquées de 1g, 3 g, 9 g et 27 g.



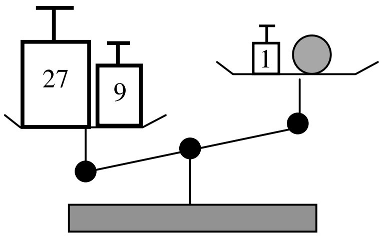
Voici les deux premiers essais que fait Julie :

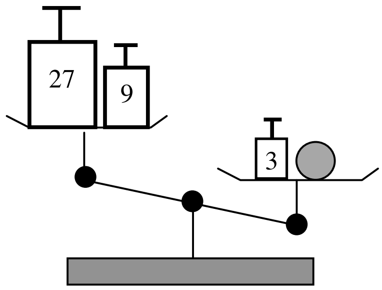




Le premier essai montre que la boule pèse plus que 27 grammes et le deuxième essai montre aussi quelque chose d'intéressant.

Voici encore deux autres essais où Julie n'arrive toujours pas à équilibrer la balance :





Julie sait que la boule pèse un nombre entier de grammes.
Après ces quatre essais, elle peut donc trouver combien de grammes pèse la boule.

Combien de grammes pèse la boule ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : calcul mental (somme de petits nombres)
- Logique : raisonnement, combinaisons d'inégalités

Analyse de la tâche

- Comprendre le fonctionnement de la balance et la variété de possibilités pour positionner les masses marquées
- Comprendre que les quatre schémas représentent des essais successifs pour évaluer la masse de la boule :
  avec les deux premières balances, comprendre que la masse *m* est comprise entre 27 g et 36 g
  puis procéder par essais successifs des masses de 28 g à 35 g en vérifiant la compatibilité avec les deux autres essais.

Ou déduire du 3e essai que la boule pèse moins de 35 g (si elle pesait 35g, il y aurait équilibre) et du 4e essai qu'elle pèse plus de 33g (si elle pesait 33g, il y aurait équilibre).

Ou déduire des deux derniers essais que c'est un poids de 2 grammes qui permettrait d'équilibrer la balance et la boule pèse donc 36 - 2 = 34 grammes.

- Conclure que la boule pèse 34 g.

Attribution des points

4 La réponse exacte (34 g) avec des explications claires

3 La réponse exacte (34 g) avec des explications peu claires

2 La réponse exacte (34 g) sans explications
ou réponse erronée mais la balance 2 et une des deux balances 3 ou 4 sont correctement interprétées

1 Une réponse erronée mais avec des explications montrant une compréhension du fonctionnement de la balance (à partir des conclusions données pour une d'entre elles)

0 Incompréhension du problème

5. TIR A LA CIBLE A LUNA PARK (Cat. 3, 4, 5)

Au stand de tir à la cible du Luna Park, il faut tirer sur des ballonnets colorés, rouges ou bleus.
Pour chaque ballonnet crevé, on gagne un nombre de points qui dépend de la couleur du ballonnet.
Pour gagner une peluche, il faut totaliser au moins 420 points.
Paul a fait éclater 6 ballonnets rouges et il a obtenu 150 points.
Charles fait éclater seulement 2 ballonnets bleus et il a aussi obtenu 150 points.
Thomas a fait éclater 3 ballonnets bleus et 8 ballonnets rouges.

Thomas a-t-il totalisé assez de points pour gagner une peluche ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication et division avec les nombres naturels

Analyse de la tâche

- Comprendre, à partir des tirs de Paul et de Charles, que toucher un ballonnet rouge permet de gagner 25 points (150 : 6), alors qu'atteindre un ballonnet bleu permet d'en gagner 75 (150 : 2). Ces résultats peuvent aussi être obtenus par des essais additifs ou multiplicatifs.
- En déduire la somme des points obtenus par Thomas en atteignant 3 ballonnets bleus et 8 rouges : (75 × 3) + (25 × 8) = 225 + 200 = 425.
- Constater que le total des points obtenus est supérieur à 420 et en conclure que Thomas a pu gagner une peluche.

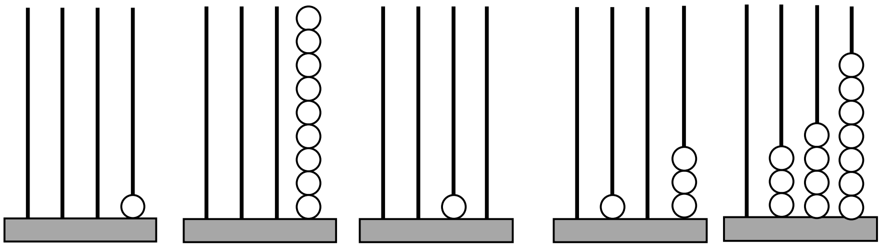
Ou : comprendre, éventuellement en se servant de dessins, que 150 points sont l'équivalent de trois couples de ballonnets rouges et donc qu'un couple correspond à 50 points (150 : 3) et quatre couples, c'est-à-dire 8 ballonnets rouges, correspondent à 200 points (50 × 4) ; considérer ensuite que les points pour 3 ballonnets bleus sont donnés par la somme de 150 (points pour deux ballonnets bleus) et de sa moitié 75 (points pour un ballonnet bleu), soit 225 points. Déduire que les points totalisés par Thomas sont 200 + 225 = 425 et sont donc suffisants pour gagner une peluche.

Attribution des points

4 Réponse « oui » avec justification complète du raisonnement suivi (détail des opérations et des calculs)
3 Réponse « oui », avec explication incomplète ou peu claire (calculs peu détaillés, par exemple)
2 Procédure correcte, mais avec une erreur de calcul
1 Début de procédure correcte ou réponse « oui » sans aucune explication
0 Incompréhension du problème

6. LE BOULIER (Cat. 4, 5)

Georges a trouvé dans son grenier un boulier de quatre tiges et 24 boules percées.
Le boulier était autrefois utilisé pour représenter les nombres. Sur chaque tige, on peut enfiler 9 boules au maximum.
Georges commence à afficher les nombres sur son boulier : 1, puis 2, puis 3... et, fatigué, il s'arrête un moment à 347.
Voici les affichages de quelques nombres :



Pour afficher 1, Georges a placé 1 boule sur la première tige à droite.
Pour passer de 9 à 10, comme il n'y avait plus de place sur la tige de droite, Georges a mis une boule sur la deuxième tige et retiré les 9 boules de la première tige.
Pour afficher 103, il n'a utilisé que 4 boules : 1 boule sur la troisième tige et 3 boules sur la première tige à droite.
Pour afficher 347, il a utilisé 14 boules : 3 boules sur la troisième tige, 4 boules sur la deuxième tige et 7 boules sur la première tige à droite.
Georges continue à afficher ses nombres : 348, puis 349, puis 350, … mais il se rend compte qu'il ne pourra pas afficher certains nombres avec ses 24 boules.
Par exemple, il sera impossible d'afficher 1998 car il faudrait 27 boules.

Quel sera le plus petit nombre que Georges ne pourra pas afficher avec ses 24 boules ?

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération

Analyse de la tâche

- Comprendre le fonctionnement du boulier à partir des exemples et du commentaire.
- Distinguer le nombre affiché et le nombre de boules utilisées pour son affichage.
- Voir que les passages à la dizaine puis à la centaine supérieure nécessitent de remplir les colonnes de droite ce qui nécessite beaucoup de boules. Après 99 (18 boules) on continue jusqu'à 699 (24 boules). Par contre, 700 utilise moins de boules. Donc comprendre qu'il faut chercher un nombre plus grand que 699 en utilisant 24 boules. 798 est possible, mais 799 ne l'est pas. On s'assure que tous les nombres entre 700 et 798 sont affichables. Donc 799 est bien le plus petit nombre qui ne peut pas être affiché.

Ou passer dans le cadre purement numérique en considérant que le nombre de boules utilisées est égal à la somme des chiffres du nombre représenté sur le boulier. Constater que 699 a 24 pour somme des chiffres et que le nombre cherché est donc supérieur à 699. Constater que 799 nécessite 25 boules et que c'est le plus petit possible non affichable.

Ou après avoir remarqué que 699 est affichable, essayer la suite des nombres à partir de 700 pour arriver à la conclusion que 799 est le plus nombre non affichable.

Attribution des points

4 Réponse exacte (799) avec justification complète, notamment le fait que tous les nombres de 1 à 699 peuvent être affichés avec 24 boules et qu'il en est de même jusqu'à 798

3 Réponse exacte (799) avec justification confuse

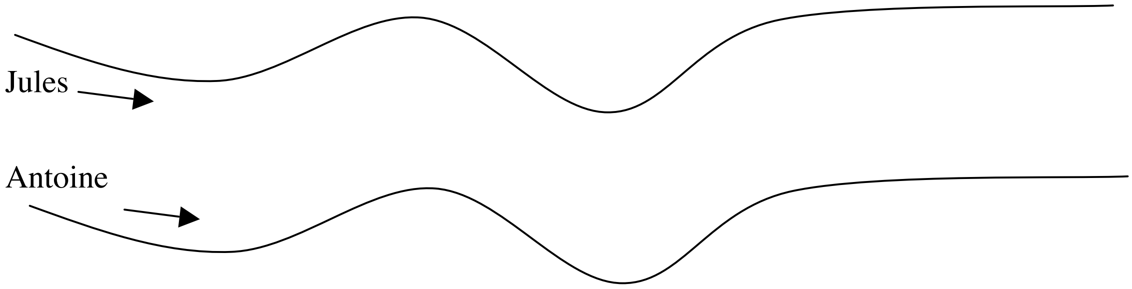
2 Réponse exacte (799) sans justification
ou autre nombre inférieur à 1 998 qui nécessite plus de 24 boules, avec justification.

1 Réponse inexacte mais début de raisonnement montrant une bonne compréhension du fonctionnement du boulier

0 Incompréhension du problème

7. RUE DES JARDINS (Cat. 4, 5, 6)

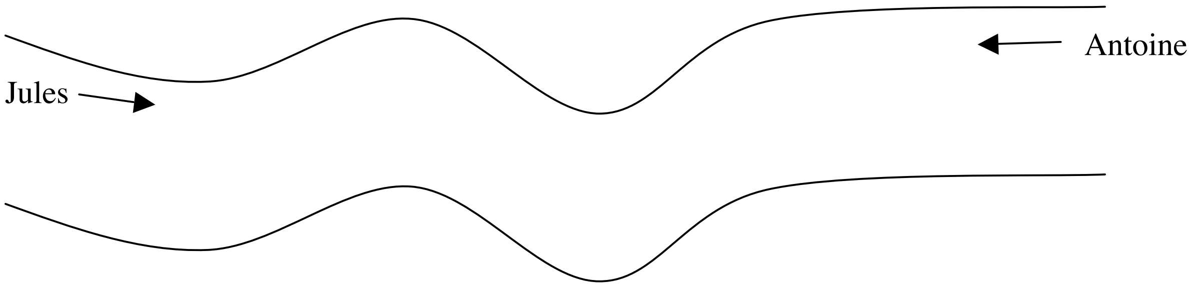
Jules et Antoine ont été chargés de peindre un numéro sur toutes les maisons de la rue des Jardins. Ils auraient dû partir tous les deux du début de la rue, comme le montre ce dessin :



Jules doit s'occuper seulement des maisons qui sont sur sa gauche quand il avance dans la rue. Il les numérotera avec des nombres pairs, en employant de la peinture rouge : sur la première maison il peindra le numéro 2, sur la deuxième le numéro 4, sur la troisième le numéro 6, et ainsi de suite jusqu'au bout de la rue.

Antoine doit s'occuper seulement des maisons qui sont sur sa droite quand il avance dans la rue. Il les numérotera avec des nombres impairs, en employant de la peinture bleue : sur la première maison il peindra le numéro 1, sur la deuxième le numéro 3, sur la troisième le numéro 5 et ainsi de suite jusqu'au bout de la rue.

Mais, Antoine se trompe et au lieu de commencer à numéroter par le début de la rue, il commence par la fin. Il peint donc les maisons qui sont du même côté de la rue que celles que peint Jules ! Il peint en commençant par le numéro 1, puis le numéro 3, puis le numéro 5 et ainsi de suite.



Antoine vient tout juste de peindre le numéro 49, en bleu, sur une maison. Il veut passer à la maison suivante~~,~~ mais il voit que Jules est en train de peindre le numéro 76 en rouge, sur cette maison,

Combien y a-t-il de maisons sur le côté de la rue des Jardins où ils ont tous les deux peint des numéros ?

Donnez votre réponse et expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : suite de nombres naturels ; nombres pairs et impairs

Analyse de la tâche

- Considérer que Jules a employé seulement des nombres pairs de 2 à 76, donc a numéroté 38 maisons (76 : 2) ; Antoine par contre a employé seulement des nombres impairs de 1 à 49. Pour déterminer le nombre des maisons qu'il a numérotées, on peut procéder de plusieurs manières, par exemple :

  - en considérant que si les maisons avaient été numérotées avec des nombres pairs plutôt qu'avec des nombres impairs, on aurait obtenu 50 (au lieu de 49), en déduire la présence des 25 autres maisons dans la rue ;
  - ou bien, en écrivant tous les nombres impairs de 1 à 49 et compter combien il y en a.

En déduire que le nombre des maisons présentes du côté de la rue où Jules et Antoine se rencontrent est 63 = 38 + 25.

Ou bien : déterminer le nombre des maisons en s'aidant d'un schéma du type :

2	4	6	8	…	…	74	**76**	78	80	…	…	120	122	124	126
						…	…	51	**49**	47	…	…	7	5	3	1

et en déduire qu'il y a 63 maisons sur ce côté de la rue.

Attribution des points

4 Réponse correcte (63 maisons) avec explications claires

3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires

2 Réponse correcte sans explications
ou réponse fausse due à une erreur de numérotation ou de calcul pour les maisons numérotées avec des nombres impairs, mais calcul correct pour les nombres pairs

1 Début de recherche cohérente
ou réponse fausse due à une erreur de calcul pour les nombres pairs et pour les nombres impairs

0 Incompréhension du problème

8. LES BORNES DE LA VIA AURELIA (Cat. 5, 6)

En Italie, la Via Aurelia est la route numéro 1. Elle est jalonnée de bornes qui indiquent la distance parcourue depuis Rome, ces bornes sont disposées tous les 100 mètres.

- Il n'y a pas de borne au point de départ de la Via Aurelia, qui est situé au centre de Rome.
- Les bornes sont de deux types : les bornes hectométriques placées tous les 100 mètres et les bornes kilométriques placées tous les 1000 mètres. Lorsqu'il y a une borne kilométrique, il n'y a pas de borne hectométrique.
- Entre deux bornes kilométriques successives, il y a donc 9 bornes hectométriques.

Par la Via Aurelia, du centre de Rome jusqu'à la frontière française il y a 697,330 km.

Combien de bornes y a-t-il sur la Via Aurelia entre le centre de Rome et la frontière française ? Parmi ces bornes, combien sont hectométriques et combien sont kilométriques ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : numération décimale de position, partie entière d'un nombre décimal, calcul sur les nombres décimaux
- Géométrie et mesures de longueurs : relation entre km, hm et m

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'on est dans une situation de numération de base 10.
- Comprendre que, pour chaque kilomètre, il y a 10 bornes (9 bornes hectométriques et 1 borne kilométrique) et en déduire que dans 697,330 km il y a donc au total 6 973 bornes, par exemple en multipliant 697,300 par 10 (il faut négliger le chiffre 3 situé à droite de la virgule).
- Ou comprendre qu'il y a une borne pour chaque hectomètre et, comme 697,330 km = 6973,30 hm, en déduire qu'il y a 6973 bornes (en notant qu'il n'y a que 6973 hectomètres entiers).
- Comprendre qu'il y a une borne kilométrique à chaque kilomètre, soit 697 bornes kilométriques pour les 697 kilomètres entiers et en déduire le nombre de bornes hectométriques (6 973 – 697 = 6 276).
- Ou réaliser éventuellement un dessin ou un schéma pour voir que dans chaque kilomètre il y a 9 bornes hectométriques et une kilométrique. En conclure que dans 697,330 km (soit 697 km et 330 m) il y a 697 bornes kilométriques et (697 × 9) + 3 = 6 276 bornes hectométriques.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (6973 bornes en tout, 697 kilométriques et 6276 hectométriques) avec des explications complètes sur la procédure suivie

3 Réponse correcte pour les 3 résultats demandés, avec des explications incomplètes
ou les réponses 697 et 6276 avec explications, mais avec oubli du nombre total de bornes ou encore deux des trois résultats demandés

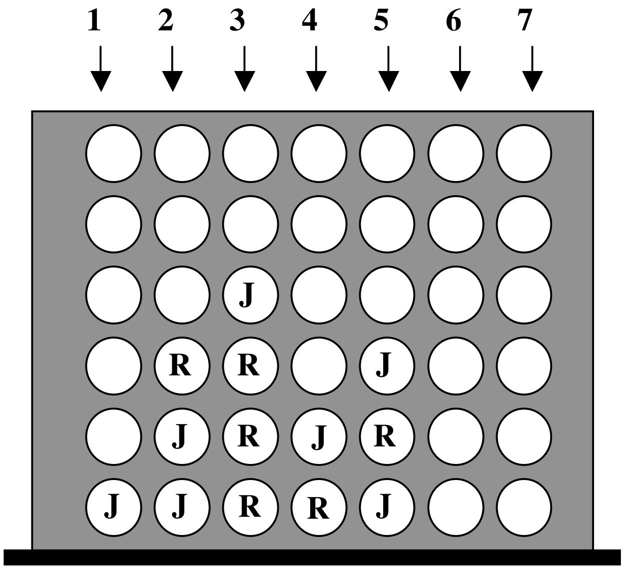
2 Réponse 6973 sans préciser le nombre de bornes kilométriques et hectométriques
ou 6970 (697 + 6273) qui ne considère pas les trois dernières 3 bornes hectométriques

1 Début d'une recherche cohérente
ou la réponse 697 qui ne donne que le nombre des bornes kilométriques
ou 700 prenant en compte seulement le nombre des bornes kilométriques et les trois bornes hectométriques ou encore réponse 7670 (en prenant 11 bornes par km).

0 Incompréhension du problème

9. PUISSANCE 4 (Cat. 5, 6)

Jeanne et Roland jouent une partie de « Puissance 4 ». À ce jeu, chacun à son tour laisse glisser un jeton dans une des colonnes de 1 à 7. Ce jeton vient alors se placer sur la rangée du bas ou sur un jeton déjà placé.
Le vainqueur est celui qui, le premier, aligne quatre jetons de sa couleur, soit horizontalement, soit verticalement, soit en diagonale.
Jeanne a commencé et a déjà placé sept jetons jaunes (J). Elle a glissé le dernier dans la colonne 3 pour empêcher Roland d'aligner verticalement quatre jetons rouges.
C'est maintenant à Roland de placer son septième jeton rouge (R).
Il dit à Jeanne : *Tu as perdu! Je suis sûr de gagner lorsque je placerai mon huitième ou mon neuvième jeton !*



Dans quelle colonne Roland peut-il glisser son septième jeton pour être sûr de gagner ?

Expliquez comment il pourra gagner avec son huitième ou son neuvième jeton.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique
- Géométrie : repérage des alignements des cases verticales, horizontales, en diagonale

Analyse de la tâche

- Voir qu'il y a déjà un alignement de 3 jetons rouges en diagonale et qu'en plaçant son jeton rouge dans la colonne 4, Roland réalise un autre alignement de 3 jetons rouges horizontaux en 3e ligne.
- Si Jeanne glisse son 8e jeton jaune dans la première colonne, Roland placera son 8e directement au-dessus, dans la même colonne et réalisera l'alignement horizontal sur la 3e ligne.
- Si Jeanne place son 8e jeton ailleurs, Roland place le sien dans la colonne 1. Alors si Jeanne place son 9e jeton dans la colonne 1 sur celui de Roland, en 3e ligne pour empêcher l'alignement horizontal, Roland placera son 9e jeton sur celui de Jeanne dans la colonne 1, en 4e ligne, et réalisera l'alignement oblique. Et si Jeanne ne place pas son 9e jeton dans la colonne 1 sur celui de Roland alors celui-ci peut placer son neuvième jeton dans la colonne 1 et réaliser l'alignement horizontal.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète, bien décrite : le 7e jeton de Roland en colonne 4, puis, selon ce que joue Jeanne, le 8e jeton de Roland en colonne 1 à la troisième ligne ou le 9e en colonne 1 (ligne 4 ou en ligne 3)

3 Réponse correcte qui considère une seule action possible pour Jeanne

2 Réponse juste pour le 7e jeton et fausse ensuite

ou réponse juste pour le 7e et 8e et 9e jeton dans la colonne 1 (sans tenir compte de l'action de Jeanne)

1 Réponse fausse dès le 7e jeton mais cohérente avec les règles du jeu

0 Incompréhension du problème

10. PARTAGES (Cat. 5, 6, 7)

Les élèves d'une classe reçoivent chacun une feuille rectangulaire de 12 cm de longueur et de 3 cm de largeur. Ils doivent la partager en trois rectangles dont les mesures des aires sont 8 cm^2, 12 cm^2 et 16 cm^2 et dont les mesures des côtés sont des nombres entiers de cm.

Combien peuvent-ils trouver de partages différents ?

(Attention ! Un partage est différent d'un autre, si au moins un de ses trois rectangles n'a pas les mêmes dimensions que l'un des rectangles de l'autre partage.)

Pour chacun des partages différents que vous avez trouvé, indiquez la longueur et la largeur des trois rectangles et montrez par un dessin que ce découpage est possible.

(Un seul dessin par partage)

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle, grandeurs et mesures
- Arithmétique : multiples et diviseurs

Analyse de la tâche

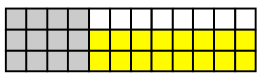
- S'assurer éventuellement que le partage est correct du point de vue des aires : 12 x 3 = 36 = 8 + 12 + 16
- Se rendre compte que pour partager un rectangle en trois rectangles, il faut d'abord tracer un segment parallèle et isométrique à l'un des côtés pour obtenir deux rectangles, puis partager l'un de ces deux rectangles par un deuxième segment, parallèle ou perpendiculaire au premier. Les deux segments peuvent donc être parallèles ou perpendiculaires.

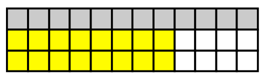
  Le partage par deux segments parallèles n'est pas possible ici, en nombres entiers, ni dans la longueur, ni dans la largeur car les trois aires des petits rectangles ne sont pas toutes des multiples de 12, ni des multiples de 3.

  Il faut donc partager le grand rectangle : soit en deux parties dans le sens de la longueur, en un rectangle de 12 x 1 et un autre de 12 x 2 qui sera découpé à son tour en deux rectangles de 8 x 2 et de 4 x 2 ; soit en deux parties dans le sens de la largeur, en un rectangle de 3 x 4 et un autre de 3 x 8, qui sera découpé à son tour en deux rectangles de 3 x 8 et de 1 x 8.

Ou par essais successifs, organisés ou non, vérifier si le partage est réalisable en tenant compte des dimensions possibles des trois rectangles: (1 x 8) et (2 x 4) pour le rectangle de 8 cm2, (1 x 12), (2 x 6) et (3 x 4) pour le rectangle de 12 cm2, (2 x 8) pour le rectangle de 16 cm2, car (1 x 16) et (4 x 4) ne peuvent entrer dans un rectangle de (3 x 12).

- Envisager alors les 6 (= 2 x 3 x 1) combinaisons possibles (2 pour le premier, 3 pour le deuxième, une seule pour le troisième) et voir qu'il n'y en a que 2 de réalisables : (1 x 8) ; (3 x 4) ; (2 x 8) et (2 x 4) ; (1 x 12) ; (2 x 8)





(pour chacun des partages dessinés ci-dessus, il y a quatre dispositions des trois rectangles, égales à une symétrie axiale ou centrale près ; selon la consigne, il ne faut en choisir qu'une seule).

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète : les dimensions des rectangles des deux partages différents [(1 × 8) ; (3 × 4) ; (2 × 8)] et [(2 × 4) ; (1 × 12) ; (2 × 8)] avec un seul dessin clair pour chacun (sans autres partages isométriques)

3 Réponse correcte : les dimensions des rectangles des deux partages différents, mais l'un des dessins manque, ou l'un des dessins est incorrect, ou les deux dessins sont peu clairs, ou plus d'un dessin par partage (partages isométriques)

2 Réponse correcte et complète pour l'un des deux partages
ou réponse avec les deux partages et dessins, mais avec un autre partage non réalisable
ou réponse avec les deux partages corrects sans dessins

1 Un seul des deux partages est trouvé, sans dessin ou avec plus d'un partage non réalisable

0 Incompréhension du problème

11. LA CLOCHE DE TRANSALPIE (Cat. 6, 7)

La cloche de l'église de Transalpie sonne chaque quart d'heure : un coup pour chaque heure, et un coup pour chaque quart d'heures.
Par exemple, à 5 heures, elle sonne 5 coups, à 5 heures et quart, elle sonne 6 coups, à 5 heures et demie elle sonne 7 coups, … à 6 heures, elle sonne 6 coups, …
Il y a trois quarts d'heure, Sylvia a entendu 11 coups et elle en entend de nouveau 11maintenant.

Combien de coups entendra-t-elle dans trois quarts d'heure ?

Donnez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique décomposition d'un nombre naturel en somme de deux nombres
- Mesure du temps

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : les deux types de coups, ceux qui correspondent aux heures entières et ceux qui sont relatifs aux quarts d'heures, (qui peuvent aller de 0 à 3), qui sont additionnés au nombre indiquant la dernière heure passée.
- Considérer les décompositions du nombre 11: 11 + 0 (11h00) ; 10 + 1 (10h15) ; 9 + 2 (09h30) ; 8 + 3 (8h45) et, par conséquent en déduire les possibilités suivantes :

Il y a trois quarts d'heure	maintenant	dans trois quarts d'heure
8 h 45	9 h 30	10 h 15
9 h 30	10 h 15	11 h 00
10 h 15	11 h 00	11 h 45

Dans les deux premiers cas, Sylvia entendra 11 coups, dans le troisième cas, elle en entendra 14.

Ou : procéder par essais, quart d'heure par quart d'heure et en considérant les heures de départ (première sonnerie) correspondant à 11 coups :

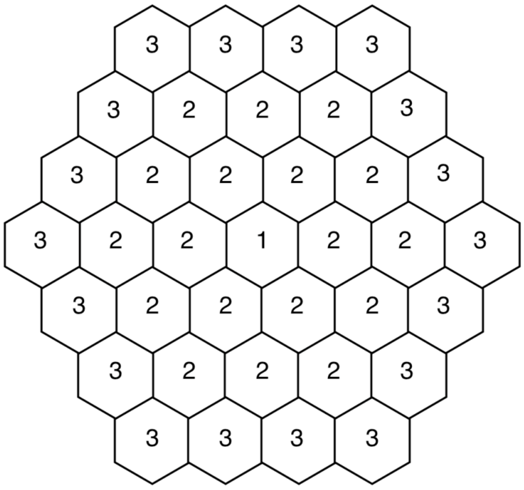
… ; 8 h ; 8 h 15 ; 8 h 30 ; **8 h 45** ; 9 h ; 9 h 15 ; **9 h 30** ; 9 h 45 ; 10 h ; **10 15** ; … en remarquant que l'heure initiale doit être avant 11h parce qu'il ne sera pas possible d'entendre encore 11 coups après 11 h. On ne retient alors que les occurrences « passées » qui déterminent les 11 coups « actuels » (à 9 h 30 ; 10 h 15 ; 11 h 00) auxquelles il faudra ajouter trois quarts d'heure pour déterminer les occurrences « futures », (10 h 15 ; 11 h 00 ; 11 h 45) qui correspondront encore à 11 coups dans les deux premiers cas ou à 14 coups dans le troisième.

Attribution des points

4 Les deux possibilités (11, 14) justifiées par les horaires correspondants aux trois occurrences
3 Les deux possibilités (11, 14) avec explications incomplètes (par exemple en ne remarquant que deux occurrences)
2 Les deux possibilités (11, 14) sans explication
ou une seule des deux réponses (11 ou 14) avec explications
1 Une seule des deux réponses (11 ou 14) sans explications
0 Incompréhension du problème

12. LE RESEAU HEXAGONAL DE ROSALIE (Cat. 6, 7, 8) ©ARMT 2011 – 19e – épreuve Finale

Dans ce réseau hexagonal, on se déplace d'une alvéole à une alvéole voisine (deux alvéoles sont voisines si elles ont un côté commun).
Rosalie part de l'alvéole du centre (1) et rejoint une alvéole de l'extérieur (3) en passant par deux autres alvéoles (2).



En se déplaçant de cette manière, Rosalie doit donc faire toujours quatre étapes : 1, 2, 2, 3

Combien de chemins différents Rosalie peut-elle emprunter ?

Expliquez comment vous avez compté ces chemins.

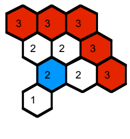
ANALYSE A PRIORI

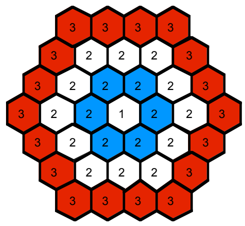
Domaine des connaissances

Logique et combinatoire : dénombrement

Analyse de la tâche

- Observer la structure de la grille : une alvéole centrale (1), et trois « ceintures » d'hexagones concentriques d'alvéoles 2, 2 et 3
- Observer que les des deux alvéoles 2 d'un chemin ne peuvent pas être sur le même hexagone.
- Compter qu'il y a six choix pour la première alvéole 2 (du premier hexagone)
- Compter qu'il y a pour chacune de ces premières alvéoles 2, trois possibilités de prendre une deuxième alvéole 2 du deuxième hexagone (voir le motif partiel ci-dessous).
- Compter qu'il y a, pour ces dernières alvéoles 2, selon leur position, deux ou trois possibilités d'aboutir à une alvéole 3. (Si l'alvéole 2 est au sommet de l'hexagone, elle est voisine de trois alvéoles 3, si l'alvéole 2 est au milieu d'un des dôtés de l'heagone, elle n'est voisine que de deux alvéoles 3.
- En déduire que le nombre de chemins 1-2-2-3 possibles correspond se calcule par (6 × 2 × 2) + (6 × 1 × 3) = 42





Ou compter qu'il y a 7 chemins 1-2-2-3 dans le motif ci-contre et remarquer qu'il se répète radialement six fois pour donner la grille

Ou observer que les alvéoles 3 des sommets de l'hexagone du bord ne peuvent être atteintes que par un seul chemin (en ligne droite) alors que les alvéoles 3 à qui ne sont pas sur les sommets peuvent être atteintes par trois chemins. et que, par conséquent il y a 42 = (6 × 1) + (12 × 3) chemins possibles.

Attribution des points

4 Réponse correcte (42) et le dénombrement est expliqué ou montré

3 Réponse correcte et les explications sont partiellement données
ou réponse 36 qui correspond à l'oubli d'un chemin passant par une des alvéoles 2 située sur un sommet du deuxième hexagone (deux chemins pour aller sur une alvéole 3 au lieu des trois possibles)

2 Réponse correcte sans explication
ou une réponse de 37 à 41

1 De 30 à 35 chemins
ou absence de réponses mais début d'organisation cohérente du comptage
ou une réponse supérieure à 42, justifiée par des calculs basés sur une confusion de chemins (par exemple $6 \times\cdot 3 \times\cdot 3 = 54$ en faisant l'erreur que pour chaque deuxième 2 on a trois possibilités d'arriver à une alvéole 3)

0 Moins de 30 chemins ou incompréhension du problème

13. LE PARCOURS (Cat. 6, 7, 8, 9) ©ARMT 2011 – 19e – épreuve Finale

Dans la cour de l'école, on a dessiné un parcours composé d'un certain nombre de cases numérotées.
Un jeu consiste à se déplacer sur le parcours, de cases en cases, à l'aide d'un dé et selon les règles suivantes :

- si, en jetant le dé, on obtient un nombre supérieur à 3, on avance de 5 cases,
- si le nombre est inférieur à 3, on recule de trois cases,
- si le nombre est 3 on reste immobile,
- si on doit reculer au-delà de la case de départ, on est éliminé.

Au cours d'une partie, Roberto, après avoir jeté treize fois le dé, se rend compte qu'il a avancé de 9 cases.

Combien de fois le nombre 3 a-t-il pu apparaître lors de ses treize lancers.

Trouvez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

ANALISI A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication, nombres relatifs,
- Algèbre : système linéaire

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles du jeu et la situation de Roberto : en 13 lancers, il n'a pas été éliminé, a avancé de 9 cases par des déplacements de 5 vers l'avant, de 3 vers l'arrière et/ou des cas où il est resté immobile.
- Se rendre compte que, au niveau mathématique, on doit obtenir le nombre 9 (9 cases vers l'avant) comme différence d'un multiple de 5 (m_5) et d'un multiple de 3 (m_3) (C'est-à-dire $9 = m_5 - m_3$). Faire quelques essais mentalement pour comprendre que, parmi les multiples de 5 : 5, 10, 15, 20, 25, … , certains valent 9 de plus qu'un multiple de 3 (comme 15, 30, 45, …) et d'autres non, comme 5, 10, 20, 25, 35, 40 … Il ne faudra donc examiner que les cas 15, 30, 45 … correspondants à 3, 6, 9, … déplacements de 5 cases vers l'avant (« +5 »):

  - avec 3 « +5 », il faut 2 « - 3 » et **8** « 0 » car $3 \times 5 - 2 \times 3 = 9$ et $3 + 2 + 8 = 13$
  - avec 6 « +5 », il faut 7 « - 3 » et **0** « 0 » car $6 \times 5 - 7 \times 3 = 9$ et $6 + 7 + 0 = 13$

  au-delà de 6, le nombre de déplacements dépassera 13.

  Il y a donc deux possibilités comme réponse à la question : le « 3 » est sorti 8 fois ou 0 fois :

Ou : travailler par essais organisés, avec des listes, inventaires, … (si les essais ne sont pas organisés, on trouvera aussi les deux solutions mais sans savoir qu'elles sont les seules).

Ou, par algèbre, noter par a, b, c, les nombres de fois qu'on obtient respectivement un nombre plus grand que 3, un nombre plus petit que 3 et le nombre 3, puis poser le système :

$$5a - 3b = 9 \qquad \text{et} \qquad a + b + c = 13,$$

Ce système doit être résolu dans l'ensemble des nombres naturels. Si, par exemple, on multiplie la deuxième équation par 3 et on soustrait la première, on réduit le système à l'équation : $8a + 3c = 48$. dont les solutions (a ; c), avec $a > 0$, sont (3 ; 8) et (7 ; 0), correspondant aux deux possibilités de réponse à la question : le « 3 » est sorti 8 fois ou 0 fois.

Attribution des points

4 Réponse correcte (les deux possibilités 0 ou 8) avec des explications complètes sur la procédure suivie : calculs ou représentations exhaustifs

3 Réponse correcte avec des explications incomplètes :calculs ou représentation qui ne permettent pas d'établir clairement la procédure suivie ni l'exhaustivité des solutions

2 Réponse correcte sans explication
ou organisation correcte du problème qui aboutit à une seule solution bien expliquée

1 Début d'une recherche cohérente, ou une seule réponse sans explication

0 Incompréhension du problème

14. L'AGE DU PROFESSEUR (7, 8, 9, 10)

Le professeur de mathématiques propose à ses élèves une question subtile :

Calculez mon âge sachant que :
si je double l'âge que j'aurai dans 4 ans et si j'enlève 20 à l'âge que j'avais il y a 4 ans, la différence entre les deux nombres obtenus est le double de l'âge que j'ai aujourd'hui !
À vous maintenant de trouver mon âge !

Quel est l'âge du professeur ?

Expliquez comment vous l'avez trouvé

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique
- Arithmétique : multiplication, soustraction
- Algèbre : équations

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation et notamment le fait que "dans 4 ans" se traduit par "4 ans de plus" et "il y a 4 ans" par "4 ans de moins"
- Comprendre que pour pouvoir enlever 20 à l'âge d'il y a quatre ans, le professeur doit avoir plus de 24 ans aujourd'hui.
- Procéder ensuite par essais organisés : vérifier que l'âge n'est pas 25 parce que la différence entre 2 x (25 + 4) = 29 et (25 - 4) - 20 = 1 ; n'est pas 26 parce que 2 x 30 - (22 - 20) ≠ 52, ainsi de suite, jusqu'à 32, l'âge cherché, qui conduit à l'égalité 2 x 36 - (28 - 20) = 64.

  Si l'on observe que la différence doit être un nombre pair (le double de l'âge dans 4 ans) et que le premier terme est pair, on en déduit que le second terme de la différence est aussi pair, ce qui réduit le nombre des essais aux nombres pairs.

Ou, établir un tableau ou une liste organisée reprenant toutes les données de l'énoncé. Par exemple :

aujourd'hui	«il y a 4 ans»	«dans 4 ans»	«il y a 4 ans»-20	2 x«dans 4 ans»	différence	2 x aujourd'hui
40	36	44	16	88	72	80
30	26	34	6	68	62	60
…	…	…	…	…	…	…
32	28	36	8	72	**64**	**64**

Ou : résoudre le problème par voie algébrique. Si, par exemple, on note par a l'âge du professeur, les conditions peuvent se traduire par l'équation $2(a + 4) – ((a – 4) –20) = 2a$, on arrive à la solution $a = 32$, qui est l'âge du professeur.

Attribution des points

4 Réponse correcte (32 ans) avec explication claire qui donne le détail des tentatives ou la voie algébrique suivie

3 Réponse correcte avec explication incomplète ou seulement une vérification

2 Réponse bien expliquée, avec une seule erreur de calcul
ou une mise en équation correcte avec une seule erreur de résolution

1 Réponse correcte sans aucune application
ou début de recherche cohérent

0 Incompréhension du problème

15. CADEAU D'ANNIVERSAIRE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Les triplés Alain, Jean et Georges ont décidé d'offrir à leur meilleur ami le jeu vidéo qu'il désire depuis longtemps pour son anniversaire. Mais aucun des trois enfants n'a suffisamment d'argent dans sa tirelire pour acheter ce jeu vidéo à lui tout seul : il manque 17 euros à Alain, 13 euros à Jean et 21 euros à Georges.

Ils décident de mettre en commun leurs économies, et de cette façon, non seulement ils peuvent acheter le jeu pour leur ami, mais en plus, ils peuvent acheter un deuxième jeu identique, et il leur reste encore 7 euros.

Pouvez-vous dire combien coûte le jeu vidéo et combien d'euros chaque enfant avait dans sa tirelire ?

Donnez vos réponses et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication et division de nombres naturels
- Algèbre : mise en équations et résolution d'une équation du premier degré

Analyse de la tâche

- Se rendre compte, à partir des informations sur le contenu des tirelires, que le prix du jeu vidéo est supérieur à 21 euros (à Georges, qui a le moins d'argent, il manque 21 euros pour en avoir suffisamment dans sa tirelire pour acheter le jeu) et que les différences entre ce que les triplés ont dans leurs tirelires et le prix du jeu sont, respectivement, 17, 13 et 21 euros.
- Comprendre dans la seconde partie de l'énoncé que la somme des euros contenus dans les tirelires des enfants est égale à deux fois le prix du jeu plus 7 euros.
- Faire l'hypothèse d'un prix supérieur à 21 euros (par exemple 30 euros), puis procéder à des ajustements ultérieurs de cette valeur pour obtenir l'égalité entre la somme totale des économies et le double du prix du jeu augmenté de 7 ; par exemple par un tableau de ce genre :

Prix du jeu	économies d'Alain	économies de Jean	économies de Georges	sommes des économies	double du prix du jeu + 7 euros
30	30 - 17 = 13	30 - 13 = 17	30-21 = 9	39	67
…	…	…	…	…	…
55	55 - 17 = 38	55-13 = 42	55-21 = 34	114	117
58	58 - 17 = **41**	58-13 = **45**	58-21 = **37**	**123**	**123**

- En déduire que le prix du jeu est de 58 euros, et que Alain avait dans sa tirelire 41 euros, que Jean avait 45 euros et que Georges avait 37 euros.

Ou, en langage naturel, si chaque triplé veut acheter un jeu, il manque 51 euros (17 + 13 + 21), alors que s'ils n'achètent que deux jeux, il reste 7 euros. Donc un jeu coûte 58 euros (51 + 7).

Ou, par algèbre, si par exemple on désigne par x le prix du jeu, x - 17, x - 13, x - 21 les économies des trois enfants et $2x + 7$ le montant en euros qui doit être égal à leur somme, on pose l'équation $(x - 17) + (x - 13) + (x - 21) = 2x + 7$ qui se réduit à $3x – 51 = 2x + 7$, et $x = 58$.

Attribution des points

4 Toutes les réponses correctes (prix du jeu vidéo : 58 euros ; économies : Alain, 41 euros ; Jean, 45 euros ; Georges, 37 euros) avec des explications claires et complètes

3 Les réponses correctes avec des explications incomplètes ou peu claires ou seulement une vérification
ou seulement le calcul du prix du jeu, avec explications complètes mais oubli des autres réponses

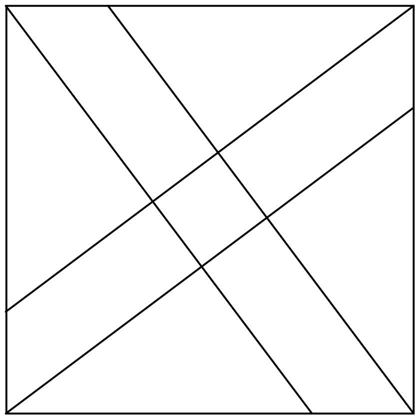
2 Les réponses correctes sans explication ni vérification
ou une procédure correcte mais avec une erreur de calcul dans la détermination du prix du jeu

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

16. LE CARRE DE JOSEPH (Cat. 7, 8, 9, 10) ©ARMT 2011 – 19e – épreuve Finale

Joseph a partagé un carré de 20 cm de côté en neuf parties en y dessinant quatre segments.
Chaque segment a une extrémité sur l'un des sommets du carré et l'autre sur un point qui se situe au quart d'un côté, à partir du sommet opposé.



Calculez l'aire de chacune des neuf parties.

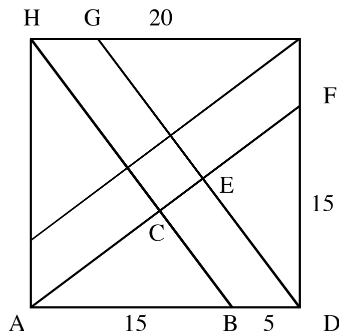
Donnez le détail de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Géométrie : triangles et polygones, isométrie, similitude, théorème de Pythagore
- Logique: chaîne de raisonnements déductifs

Analyse de la tâche



- Comprendre la construction de la figure à partir des données et en particulier le partage des côtés du carré en segments de 5 et 15 cm
- Reconnaître les quatre « grands » triangles rectangles de côtés 20 et 15 (comme ADF) ; voir qu'ils sont égaux (Le sommet de l'angle droit de chacun de ces triangles est un sommet du carré, on passe de l'un à l'autre par des rotations élémentaires d'un quart de tour, d'un demi-tour, …). Ces considérations devraient permettre aux élèves de se convaincre que les quatre segments d'origine sont parallèles deux à deux et perpendiculaires deux à deux, que la figure centrale est un carré et que les quatre autres parties sont des trapèzes rectangles.

  Remarquer encore la présence de deux parallélogrammes égaux (BDGH),.

  Toutes les constatations précédentes peuvent évidemment être « démontrées » rigoureusement à partir des isométries, de l'égalité ou de la similitude des triangles, mais cette tâche n'est pas requise ici, vu l'âge des élèves et la diversité de leurs programmes scolaires.

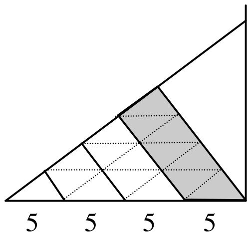
  Pour le calcul des aires des neuf parties, les procédures sont très nombreuses. Par exemple :
- Calculer la mesure de l'hypoténuse des « grands » triangles par la relation de Pythagore $15^2 + 20^2 = 625$ et $\sqrt{625} = 25$ (en cm) puis constater que, connaissant les côtés d'un parallélogramme: 5 et 25 (en cm) et l'une de ses hauteurs : 20 (en cm) on peut calculer mentalement l'aire de cette figure $5 \times 20 = 100$ (en cm^2) puis en tirer l'autre hauteur 4 (en cm) parce que $4 \times 25 = 100$. À partir de ces résultats, on calcule facilement l'aire du carré central : 16, celle des quatre trapèzes $(100 - 16)/2 = 42$ et l'aire des 4 petits triangles rectangles par soustractions et division par 4 : $[400 – (200 – 16)]/4 = 54$ (toutes en cm^2)

Ou, reconnaître la similitude entre les « petits triangles » et les « grands triangles » à partir des angles égaux et calculer par proportionnalité les mesures des côtés des petits triangles à partir de celles des grands) 25, 20, 15 —> 15 ; 12 ; 9. On en tire alors les aires des petits triangles $(9 \times 12)/ 2 = 54$ puis celle du petit carré par différence entre l'aire du grand carré et l'aire des huit autres figures (quatre trapèzes et quatre petits triangles) :

$400 - [(4 \times 42) + (4 \times 54)] = 16$. (en cm^2)

Ou, sans faire appel à la relation de Pythagore, s'apercevoir que le « triangle moyen » est composé d'un « petit triangle » et d'un trapèze rectangle, ce qui suggère un partage en quatre « bandes » ; puis procéder par pavage à l'aide de triangles unités de 5 cm d'hypoténuse, puis par calcul mental :

l'aire du « petit triangle est 9, l'aire du trapèze, en gris, est 7, l'aire du « grand triangle » est 9 + 7 + 9 = 25 (en triangles unités) = 150 (en cm^2), ce qui permet de dire qu'un triangle unité vaut 6 cm^2 et que l'aire des petits triangles est 54 et celle des trapèzes 42 (en cm^2), etc.



- Donner les réponses : (en cm^2) : 16 pour le carré central, 42 pour les quatre trapèzes, 54 pour les quatre « petits triangles ».

Ou, faire un dessin précis (en vraie grandeur) et en tirer les réponses par mesurage puis par calcul. (Procédure qui n'est pas suffisante du point de vue mathématique.)

Attribution des points

4 Réponses correctes (16, 54, 42, en cm^2) avec le détail des calculs pour chaque figure (les mesures pour les calculs ne sont pas trouvées par mesurage sur un dessin)

3 Réponses correctes (16, 54, 42) avec des calculs incomplets ou peu clairs ou avec des mesures prises sur un dessin
ou une seule erreur de calcul avec explications claires (les réponses sont cohérentes avec cette seule erreur)
ou deux réponses correctes bien expliquées

2 Réponses correctes (16, 54, 42) sans explications
ou plusieurs erreurs de calcul avec explications claires et réponses cohérentes
ou deux réponses correctes avec des calculs incomplets ou non clairs

1 Une seule réponse correcte
ou début de raisonnement cohérent (avec détermination de l'hypoténuse des « grands triangles » 25)

0 Incompréhension du problème

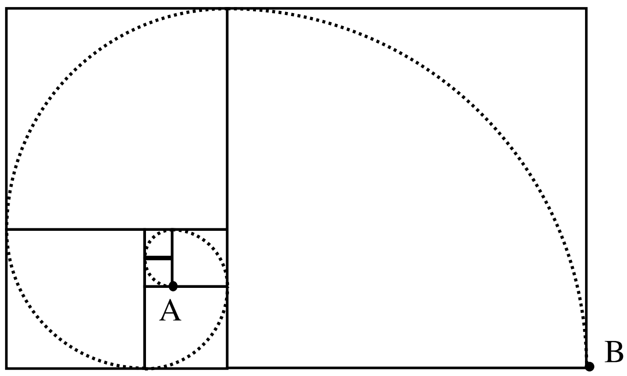
17. LA SPIRALE (Cat. 8, 9, 10)

Léonardo forme des rectangles en juxtaposant des carrés. Il a commencé par deux petits carrés dont un des sommets est le point A. Puis il a continué en ajoutant un carré sur la droite, puis au-dessous, puis sur la gauche, puis dessus, puis de nouveau sur la droite, etc.

Sur la figure ci-dessous on a représenté son rectangle, obtenu avec les 7 premiers carrés, dont un sommet est le point B.

Leonardo a dessiné ensuite un quart de cercle dans chacun des sept carrés Chacun des quarts de cercle va d'un sommet du carré au sommet opposé et a son centre sur un autre sommet du même carré.

Les sept premiers quarts de cercle forment une « spirale » qui va de A à B.



Le périmètre du rectangle composé des 7 premiers carrés est 136 cm.

Quelle est la longueur de la spirale de A à B ?

(Exprimez cette longueur à l'aide de π ou par une approximation au mm près) ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : propriétés de l'addition et de la multiplication, (distributivité), proportionnalité
- Géométrie : propriétés des carrés et rectangles, périmètre, cercle
- Algèbre ; équation du premier degré

Analyse de la tâche

- Observer le dessin et les carrés suivant la « spirale » : les deux petits carrés unités, puis des carrés de 2, 3, 5, 8, 13, … de côté, ce qui permet de constater que la largeur et la longueur du rectangle sont respectivement 13 et 21 (13 + 8) et le périmètre est $2 \times (13 + 21) = 68$ (en côtés du carré unité). (Pour ce calcul, il faut faire appel systématiquement à l'addition de segments et au report de mesures d'un côté dans les carrés successifs). En déduire que le côté du carré unité mesure 136/68 = 2 (en cm).

Ou par voie algébrique, avec par exemple x comme côté du carré unité, $2x$, $3x$ … $13x$, les mesures des carrés successifs, l'équation $(21x + 13x) = 136$, a pour solution $x = 2$

- Calculer la longueur des quarts de cercle et les additionner: $\pi/2 + \pi/2 + 2\pi/2 + 3\pi/2 + 5\pi/2 + 8\pi/2 + 13\pi/2 = 33\pi/2$ ou encore $16{,}5\pi$ (en côtés de carrés unités) ou 33π (en cm) ou une approximation comme103,7 cm ou 1037 mm. (On acceptera aussi 103,6 cm et 1036 mm pour les élèves qui auraient utilisé 3,14 comme approximation de π.)

Attribution des points

4 Réponse exacte (33π ou 103,7 ou 103,6 en cm), avec explications claires et complètes

3 Réponses exactes avec explications peu claires ou incomplètes
ou une erreur ou imprécision dans l'approximation (avec plus d'un chiffre après la virgule entre 103,6 et 103,7), avec explications

2 Réponses exactes sans explications
ou erreur (due par exemple aux additions des longueurs des sept arcs)
ou réponse en côtés du carré unité (33/2π ου 16,5π) avec explications

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

18. LA CAVE DE TRANSALPIE (Cat. 8, 9, 10) ©ARMT 2011 – 19e – épreuve Finale

Dans la cave de Transalpie, on vient de recevoir des vins d'Italie. Le caviste les place dans des casiers, avec le même nombre de bouteilles par casier.

Quelques jours plus tard, arrivent des vins français. Comme le caviste ne veut pas mélanger les deux sortes de vins, il retire les bouteilles de 10 casiers et les place dans les autres casiers de vins d'Italie qui contiennent alors chacun une bouteille de plus.

Arrivent enfin des vins suisses et luxembourgeois et aussi des bières belges. Le caviste retire encore les bouteilles de vins d'Italie de 15 casiers et arrive à en placer exactement deux de plus dans chaque autre casier de vins d'Italie.

Combien de bouteilles de vin d'Italie sont-elles arrivées dans la cave de Transalpie ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations
- Algèbre : mise en équations, équations du premier et second degré, systèmes d'équations linéaires

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'au début le nombre de bouteilles est le même dans chaque casier, puis que le nombre de casiers de vins d'Italie diminue à chaque livraison alors que le nombre de bouteilles par casier augmente, mais que le nombre total de bouteilles de vins d'Italie reste constant.
- Introduire des inconnues en notant, par exemple par x, le nombre des casiers et par y le nombre de bouteilles de vin d'Italie par casier. Remarquer que le produit xy est égal au nombre de bouteilles de vins d'Italie.
- Mettre en équation les deux conditions du problème :
  - après la deuxième livraison il reste $x - 10$ casiers avec $y + 1$ bouteilles chacune et, puisqu'il y a toujours autant de bouteilles de vins d'Italie, on a $(x - 10)(y + 1) = xy$;
  - après la troisième livraison, il reste $(x - 10) - 15 = x - 25$ casiers disponibles pour le vin d'Italie, avec $y + 3$ bouteilles dans chacun, on a donc $(x - 25)(y + 3) = xy$.
- Pour trouver la réponse, après réduction, il faut donc résoudre ce système des deux équations à deux inconnues :

  $$x - 10y - 10 = 0 \qquad \text{et} \qquad 3x - 25y - 75 = 0$$

  dont la solution est le couple ordonné (100, 9). Il y a au départ 100 casiers et 9 bouteilles par casier ; il y a donc 900 bouteilles de vin d'Italie.

  (Il y a beaucoup d'autres choix des inconnues qui conduisent tous à la résolution d'un système du même genre.)

Ou, au niveau arithmétique, on peut effectuer pas à pas les échanges avec une seule hypothèse sur le nombre de bouteilles par casier initial et trouver, par essais successifs les répartitions qui conservent le nombre de bouteilles. Par exemple, s'il y a 2 bouteilles par casier initial, il y aura 20 bouteilles transférées (de dix casiers) une à une dans 20 casiers après la première répartition, ce qui veut dire qu'il y avait 30 casiers initialement et 60 bouteilles. Après la deuxième répartition, il ne restera que 5 (20 – 15) casiers contenant chacun 5 (3 + 2) bouteilles et l'hypothèse est à rejeter car on arriverait à 25 bouteilles après le deuxième échange II.

nb bouteilles /casier initial	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
nb initial de casiers	30	40	50	60	70	80	90	100	110	…
nb total de bouteilles) I	60	120	200	300	420	560	720	**900**	1100	…
- nb final de casiers	5	15	25	35	45	55	65	75	85	…
nb final bouteilles/casier	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
nb total de bouteilles) II	25	90	175	280	405	550	715	**900**	1115	…

Conclure qu'il y a au départ 900 bouteilles de vin d'Italie.

Attribution des points

4 Réponse correcte (900 bouteilles de vins d'Italie) avec une procédure claire et détaillée (c'est-à-dire avec les répartitions successives)

3 Réponse correcte avec une procédure pas clairement expliquée

2 Réponse erronée à cause d'une erreur de calcul, mais avec des explications claires
ou écriture correcte d'un système, mais solution erronée à cause d'erreurs algébriques

ou réponse correcte sans explications

1 Début de raisonnement correct qui montre une compréhension de la situation (par exemple un inventaire organisé correctement mais qui n'arrive pas à la conclusion, confusions entre nombre de casiers ou nombre de bouteilles par casier …)

0 Incompréhension du problème

19. LE CODE DE TONI (Cat. 9, 10)

Toni a choisi un code pour le cadenas de sa valise.
Ce code est un nombre de 3 chiffres tous différents ; aucun de ces chiffres n'est égal à 0.
Si l'on additionne tous les nombres à deux chiffres que l'on peut former avec les trois chiffres du code, et si l'on multiplie cette somme par 2, on retrouve exactement le code.

Quel est le code de Toni ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération et opérations
- Algèbre

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la tâche essentielle est de trouver qu'il y a 6 nombres de deux chiffres que l'on peut former avec trois chiffres donnés ; mais qu'il y a beaucoup de combinaisons possibles pour les trois chiffres donnés et qu'il faudra du temps pour organiser les essais.
- Algébriquement, à partir de trois chiffres, dans l'ordre a, b et c, le code est $100a + 10b + c$ et la somme des six nombres de deux chiffres est $(10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) +(10c + b) = 22(a+b+c)$, ce qui conduit à l'équation $44(a+b+c) = 100a + 10b + c$, dont la seule solution, avec a, b, c naturels et inférieurs à 10, est (7 ; 9 ; 2). Mais la pose de cette équation comme sa résolution ne sont vraisemblablement pas accessibles aux élèves en 50 minutes.
- Par des essais successifs organisés et nombreux, en s'aidant de la calculatrice, on peut se convaincre peu à peu que le nombre cherché est pair, puis multiple de 4, puis multiple de 11 et par conséquent multiple de 44.

  Par exemple, avec les nombres 123 et 438

  12 13 21 23 31 32 ; (12 + 21) + (13 + 31) + (23 + 32) = 33 + 44 + 55 = 132 ; 2 x 132 = 264

  43 48 34 38 83 84 ; (38 + 83) + (34 + 43) + (48 + 84) = 121 + 77 + 132 = 330 ; 2 x 330 = 660
- Rechercher les multiples de 44 à trois chiffres distincts non nuls compris au sens large entre 264 et 999 :

  264 ; 352 ; 396 ; 528 ; 572 ; 748 ; 792 ; 836 ; 924 ; 968.
- Pour ces dix nombres, contrôler la condition de Toni. Sur les deux exemples précédents, on voit que la condition n'est pas remplie : 123 ≠ 264 (et ni pour les cinq autres nombres 132, 213, 231, 312, 321) ni pour 438 ≠ 660.

  Un seul des nombres remplit la condition : 792 (et non 729, 279, 297, 927, 972) :

  27 29 72 79 92 97 (27 + 72) + (29 + 92) + (79 + 97) = 99 + 121 + 176 = 396 2 x 396 = 792

Attribution des points

4 Réponse exacte : 792, avec une explication claire qui montre que tous les essais ont été effectués, et une vérification

3 Réponse exacte : 792, l'exhaustivité n'étant pas établie, mais avec une vérification

2 Une démarche qui comprend l'élaboration de la condition de Toni sous la forme algébrique $44(a+b+c)$ ou qui pose l'équation $44(a+b+c) = 100a + 10b + c$, mais sans aller plus loin
ou découverte que le nombre est un multiple de 44 avec justifications, mais sans aller plus loin

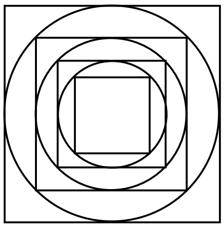
1 Plusieurs essais organisés où apparaissent les six nombres de deux chiffres, mais sans trouver la solution

0 Incompréhension du problème

20. CARRES ET DISQUES (Cat. 10)

Antoine a commencé ce dessin à partir du carré qui est à l'intérieur, dont l'aire est de 1 cm^2.

Il veut continuer sa construction en ajoutant carrés et disques toujours plus grands, mais sa feuille de papier est trop petite.



Combien de carrés devrait-il construire pour que l'aire du plus grand carré arrive à dépasser un hectare (10 000 m^2) ?

Quelle est la mesure du côté de ce carré ?

Justifiez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : le carré et ses propriété ; carré inscrit et circonscrit à un disque ; diagonale d'un carré et théorème de Pythagore
- Arithmétique : progression géométrique
- Algèbre : calcul littéral

Analyse de la tâche

- Observer la construction des carré qui se suivent : chaque carré a comme côté le diamètre du cercle inscrit qui est aussi la diagonale du carré précédent.
- Appliquer le théorème de Pythagore et en déduire que le deuxième carré a comme longueur du côté $\sqrt{2}$ cm, comme aire 2 cm^2, que le troisième a 2 cm de côté et 4 cm^2 d'aire,

  ou imaginer une simple rotation d'un quart de tour du petit carré qui montre qu'il vaut la moitié du suivant. et comprendre que chaque aire est le double de celle précédente et qu'on peut les exprimer ainsi : 2^0, 2^1, 2^2, …
- Comprendre qu'on doit chercher la première puissance de 2 supérieure a 100 000 000 (qui correspond en cm^2 a 1 hm^2), par essais ou en s'aidant de la calculatrice, on trouve 2^{27}.
- En observant que l'aire du *n* ème carré est 2^{n-1}, comprendre qu'il faudra construire 28 carrés. Le côté du 28e carré, d'aire 2^{27} (en cm^2) est $\sqrt{2^{27}} \approx 11585$ (en cm). (Une décomposition de 2^{27} en $2^{26} \times 2$ donne $\sqrt{2^{27}} = 2^{13}\sqrt{2} = 8192\sqrt{2}$. Selon l'approximation choisie pour $\sqrt{2}$ on pourra admettre à la rigueur des réponses entre 11400 et 11600.

Attribution des points

4 Réponses correctes (28 carrés à construire, la mesure du côté de ce carré est $\sqrt{2^{27}}$ ou $2^{13}\sqrt{2}$, ou une approximation située entre 11400 et 11600, en cm) avec justification

3 Réponses correctes avec justification incomplète
ou seulement la réponse 28e carré avec justification
ou deux réponses correctes mais relatives au 27e carré et 8192 cm ou au 29e carré et 16384 cm

2 Raisonnement correct avec la succession des puissance de deux mais quelques erreurs de calcul
ou seulement la réponse 28e carré sans justification
ou deux réponses relatives au 27e carré ou au 29e carré sans justifications

1 Début de résolution correcte
ou la succession des puissances de 2, mais erreurs dans la conversion d'unités (de cm à hm)

0 Incompréhension du problème