

Problèmes		**Catégories**								**Thèmes**					**Origine**
1	Carrés de couleurs	3								Ar	Géo				RMT
2	Rectangles recomposés	3	4								Géo				LU
3	Bianca et les vitamines		4							Ar					RZ
4	Tir aux fléchettes	3	4							Ar					RMR
5	Les roulades à l'italienne	3	4	5						Ar					SI
6	Étoile magique	3	4	5	6					Ar					PR
7	Nains sur la balance		4	5	6					Ar			Lo		RMT
8	Pentatriangles			5	6	7					Géo	Co			GE
9	Argent de poche			5	6	7				Ar					LU
10	Tours de 18 cubes			5	6	7				Ar	Géo	Co			fj
11	Le relais de Transalpie			5	6	7	8			Ar					SR
12	Produits en triangles (I)				6	7	8			Ar					RMT
13	Le chien et le renard					7	8	9	10	Ar				Alg	RV
14	Rocco et ses frères					7	8	9	10	Ar			Lo	Alg	BB
15	Carrés superposés						8	9	10		Géo			Alg	PR+fj
16	Tours de 36 cubes						8	9	10	Ar	Géo	Co			fj
17	Frises						8	9	10	Ar	Géo		Lo		BB
18	Produits en triangles (II)							9	10	Ar					RMT
19	Que de carrés !							9	10		Géo		Lo		LU+RMT

« Quels énoncés pour ma classe ? »

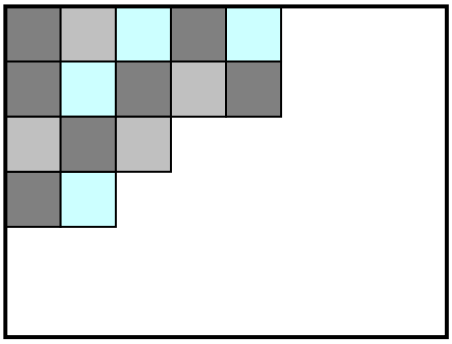
1. Repérer la catégorie de votre classe :
   - Soit par les 2 premiers chiffres du code d'identification.
     *<u>Exemple</u> : code LY **04**132 = catégorie 4 ou cat.4*

2. Repérer les exercices de l'épreuve pour votre classe selon sa catégorie.
   <u>Exemples</u> :
   - *une classe inscrite en **catégorie 3** doit résoudre les exercices **1,2 et 4 à 6***
   - *une classe inscrite en **catégorie 4** doit résoudre les exercices **2 à 7***
   - *une classe inscrite en **catégorie 5** doit résoudre les exercices **5 à 11**.*

Liste des exercices	CATEGORIE DE LA CLASSE							
	Ecole élémentaire			Collège et Lycée				
	3	4	5	6	7	8	9	10
1. Carrés de couleurs	X							
2. Rectangles recomposés	X	X						
3. Bianca et les vitamines		X						
4. Tir aux fléchettes	X	X						
5. Les roulades à l'italienne	X	X	X					
6. Étoile magique	X	X	X	X				
7. Nains sur la balance		X	X	X				
8. Pentatriangles			X	X	X			
9. Argent de poche			X	X	X			
10. Tours de 18 cubes			X	X	X			
11. Le relais de Transalpie			X	X	X	X		
12. Produits en triangles (I)				X	X	X		
13. Le chien et le renard					X	X	X	X
14. Rocco et ses frères					X	X	X	X
15. Carrés superposés						X	X	X
16. Tours de 36 cubes						X	X	X
17. Frises						X	X	X
18. Produits en triangles (II)							X	X
19. Que de carrés !							X	X

1. CARRÉS DE COULEUR (Cat. 3)

Un peintre est devant sa toile rectangulaire. Il décide de la recouvrir entièrement par des carrés de la même grandeur qu'il peindra de couleurs différentes.
Après avoir choisi la grandeur des carrés pour que toute la toile soit exactement recouverte et que les carrés ne se superposent pas, le peintre commence à les dessiner et à les colorier.
La figure suivante montre le début de son travail :



Combien de carrés le peintre doit-il encore dessiner et colorier pour terminer son travail ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : pavage et mesures
- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication

Analyse de la tâche

- Dénombrer les carrés déjà coloriés, 15.
- Trouver le nombre de carrés qu'il faudra encore placer et colorier : soit en poursuivant le quadrillage et dénombrant les carrés nécessaires, 33, soit en mesurant le côté des carrés et les parties incomplètes sur la longueur et sur la largeur, pour déterminer les dimensions de la toile en côtés de carrés : 6 et 8 ; ce qui permettra de calculer le nombre total par multiplication et le nombre de carrés manquants par soustraction (ou addition lacunaire) : 48 - 15 = 33.

Attribution des points

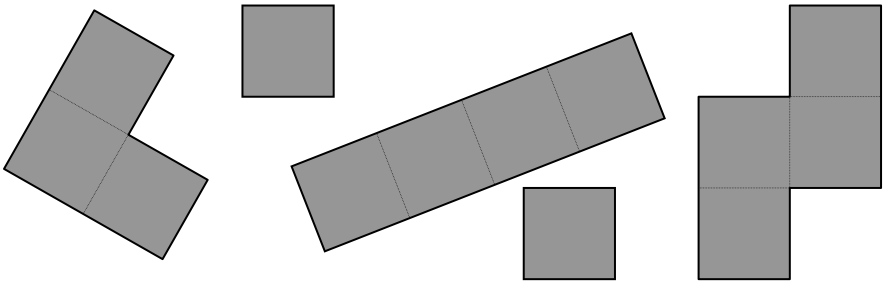
4 Réponse correcte, 33 carrés, avec explications claires de la démarche (opérations ou dessin)
3 Réponse correcte avec explication incomplète (ou dessin peu clair)
2 Réponse correcte sans aucune explication
ou réponse erronée due à une erreur dans le comptage ou une erreur de calcul, avec explications
1 Début de recherche, par exemple dénombrement des carrés déjà dessinés et coloriés, détermination du nombre de carrés nécessaires pour couvrir une colonne ou une rangée du tableau, …
0 Incompréhension du problème

Niveau: 3

Origine: RMT (2e RMR et autres)

2. RECTANGLES RECOMPOSÉS (Cat. 3, 4)

Voici les cinq pièces d'un puzzle : deux petits carrés, une pièce composée de 3 carrés et deux autres de 4 carrés.



- Pierre a construit un rectangle dont la longueur est le double de la largeur, en utilisant plus de deux pièces.
- Nadia a construit un rectangle (qui n'est pas un carré) en utilisant 4 pièces.
- José veut construire un rectangle avec toutes les cinq pièces disponibles.

Dessinez les rectangles de Pierre et Nadia.

Est-ce que José arrivera à construire un rectangle en utilisant les cinq pièces?

Si oui, dessinez-le, sinon expliquez pourquoi.

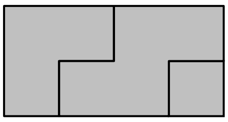
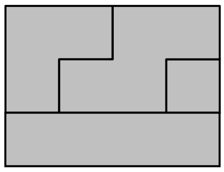
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle

Analyse de la tâche

- Observer les pièces et leur décomposition en carrés.
- Imaginer les rectangles qu'on peut former avec elles ou dresser l'inventaire après découpage et assemblage :
  de 1 ou 2 pièces : 1 x 2, 1 x 4, 1 x 5, 2 x 2 de 3 pièces : 1 x 6, 2 x 3, 2 x 4, de 4 pièces : 3 x 3, 3 x 4.
- Dessiner les rectangles de Pierre et Nadia

Pierre  Nadia 

- Comprendre qu'avec 13 carrés unitaires il est impossible de former un rectangle qui utilise toutes les pièces du puzzle étant donné que le seul rectangle possible serait un rectangle 13 x 1.
- Expliquer l'impossibilité de la tâche de José par dessins, collages et/ou argumentation.

Attribution des points

4 Dessin (ou collage) précis des deux rectangles de Pierre et Nadia et réponse « non » pour le rectangle de José avec une explication claire (numérique ou dessin des 5 pièces en deux « bandes » de 6 et 7 de longueur »)

3 Absence d'une des quatre demandes :
dessin (ou collage) précis des deux rectangles de Pierre et Nadia et réponse « non » pour le rectangle de José sans explication,
ou dessin (ou collage) précis d'un des rectangles de Pierre ou de Nadia et réponse « non » pour le rectangle de José avec une explication

2 Seulement deux des quatre demandes

1 Une seule des quatre demandes

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Luxembourg

3. BIANCA ET LES VITAMINES (Cat. 4)

Le chien de Bianca doit prendre des comprimés de vitamines.
La dose pour la semaine est de 25 milligrammes de vitamines.
Un comprimé contient 5 milligrammes de vitamines.
Le vétérinaire a prescrit l'ordonnance suivante :

LUNDI	1	comprimé
MARDI	$\frac{1}{2}$	comprimé
MERCREDI	$\frac{1}{4}$	comprimé
JEUDI		
VENDREDI	1	comprimé
SAMEDI	$\frac{1}{4}$	comprimé
DIMANCHE	1	comprimé

Malheureusement Bianca a renversé du café sur l'ordonnance et elle n'arrive plus à lire la dose prescrite pour le jeudi.

Quelle est la dose prescrite pour le jeudi ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, fractions

Analyse de la tâche

- Comprendre que la dose hebdomadaire correspond à 5 comprimés (25 : 5 = 5).
- Additionner les doses déjà notées: 1 + 1 + 1 + ½ ¼ + ¼ = 4 comprimés entiers (par dessin éventuellement) et en déduire que la dose pour le jeudi correspond à 5 – 4 = 1 comprimé.

Ou, travailler par sommes partielles. Par exemple : 3 comprimés entiers ou 15 mg de vitamines pour lundi, vendredi dimanche ; puis 1 comprimé ou 5 mg pour mardi, mercredi et samedi ; il reste 1 comprimé ou 5 mg pour le jeudi.

Attribution des points

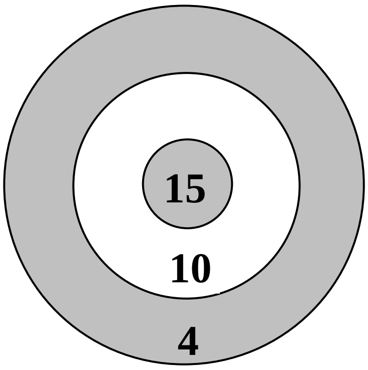
4 Réponse correcte (1 comprimé entier ou 5 mg) avec des explications claires de la démarche (calculs ou dessin)
3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes
2 Réponse correcte sans explications
ou démarche correcte avec une seule erreur de calcul
1 Début de recherche cohérente dans laquelle apparaît « 5 comprimés entiers » ou des sommes partielles
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine: Rozzano

4. TIR AUX FLECHETTES (Cat. 3, 4)

Lorsqu'on lance une fléchette dans cette cible, on peut obtenir 15 points au centre, 10 points dans la zone en blanc et seulement 4 points dans la troisième zone.



David et Frank ont lancé chacun trois fléchettes qui sont toutes arrivées dans la cible.
David a obtenu au total 4 points de plus que Frank.

Dans quelles zones de la cible sont arrivées les trois fléchettes de David et les trois fléchettes de Frank ?

Combien de points ont-ils obtenu chacun ?

Trouvez toutes les possibilités et expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: addition et soustraction
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre que deux ou trois fléchettes peuvent atteindre une même zone.
- Rechercher les sommes de trois termes 4, 10 et 15 et vérifier si l'une vaut 4 de plus que l'autre, par essais non systématiques,

Ou organiser une recherche de toutes les sommes de points possibles (il y en a 10) :

$4 + 4 + 4 = 12$; $4 + 4 + 10 = 18$; $4 + 4 + 15 = 23$; $4 + 10 + 10 = 24$ $4 + 10 + 15 = 29$;
$4 + 15 + 15 = 34$ $10 + 10 + 10 = 30$; $10 + 10 + 15 = 35$; $15 + 15 + 15 = 45$; $15 + 15 + 10 = 40$

dans cette liste, chercher les sommes dont la différence est 4 et constater qu'il n'y a qu'une possibilité : 34 – 30.

- En déduire que David a obtenu 34 points avec 2 fléchettes au centre et une flèche dans la zone « 4 »et que Frank a obtenu 30 points avec 3 flèches dans la zone « 10 ».

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (David : 34 points ; deux dans le « 15 » et une dans le « 4 « ; Frank 30 points, trois dans le « 10 ») avec explications claires et complètes montrant qu'il n'y a qu'une possibilité (détail des calculs et inventaire complet)

3 Réponse correcte et complète, avec détail des calculs pour la solution trouvée, mais sans dire que c'est la seule

2 Réponse correcte et complète, sans explications
ou inventaire de tous les cas possibles mais avec une erreur de calcul
ou réponse correcte mais incomplète, sans la somme ou sans les zones

1 Début de recherche (début d'inventaire)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : d'après un problème du 1er RMR F. 4, brochure « Ateliers »

5. LES ROULADES A L'ITALIENNE (Cat. 3, 4, 5)

Madame Tina a des invités pour le dîner. Elle a acheté 23 tranches de viande avec lesquelles elle prépare deux types de roulades.

Pour confectionner ses roulades, elle dispose sur chaque tranche de viande un morceau de fromage ou une petite saucisse, puis elle les enroule et les fixe avec des cure-dents.

Pour pouvoir distinguer les deux types de roulades, elle utilise deux cure-dents pour les roulades au fromage et un seul pour les roulades à la saucisse. À la fin de sa préparation, Tina a utilisé 36 cure-dents en tout.

Combien Tina a-t-elle préparé de roulades à la saucisse ?

Expliquez votre raisonnement.

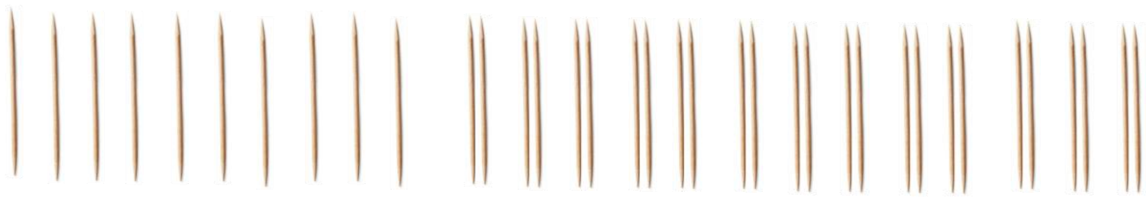
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, division de nombres naturels

Analyse de la tâche

- Procéder, de manière empirique, par un dessin ou avec du matériel, distribuer un cure-dent sur chacune des 23 roulades et utiliser les 13 cure-dents restants (36 - 23) pour fixer les roulades au fromage qui ont besoin de 2 cure-dents.



Ou, comprendre que si toutes les roulades étaient au fromage, on aurait besoin de 46 cure-dents (23 × 2) et alors la différence 46 – 36 = 10 représenterait le nombre de roulades avec un cure-dent, donc les roulades à la saucisse.

Ou, par un raisonnement analogue : si toutes les roulades étaient à la saucisse, on aurait besoin de 23 cure-dents et alors la différence 36 – 23 = 13 représenterait alors le nombre de roulades avec deux cure-dents, donc les roulades au fromage). Dans ce cas 23 – 13 = 10 serait le nombre de roulades à la saucisse.

Ou procéder par essais avec une hypothèse sur l'un des nombres de roulades, puis modifier progressivement les hypothèses pour arriver à la solution, Par exemple en choisissant un nombre proche de la moitié de 23, comme 11, pour les roulades à la saucisse, on aurait 12 roulades au fromage et 35 (11 + 2 x 12) cure-dents et il faudrait « ajuster le tir » en remplaçant une roulade à la saucisse (10) par une roulade au fromage (12), pour 36 cure-dents.

Il y a de nombreux autres démarches possibles, par exemple à partir du nombre pair de cure-dents se rendre compte qu'il y a un nombre pair de roulades à la saucisse, ce qui limite le nombre des recherches…

Attribution des points

4 Réponse correcte (10 roulades à la saucisse) avec explications ou avec illustrations claires et complètes

3 Réponse correcte avec explications peu claires ou seulement avec une vérification (13 + 10 = 23, 13 x 2 + 10 = 36)

2 Réponse correcte sans aucune explication
ou démarche correcte avec une erreur de calcul

1 Essais qui ne conduisent pas à la solution, mais qui montrent une compréhension du problème
ou réponse voisine, mais avec une erreur de calcul ou un début de procédure par essais

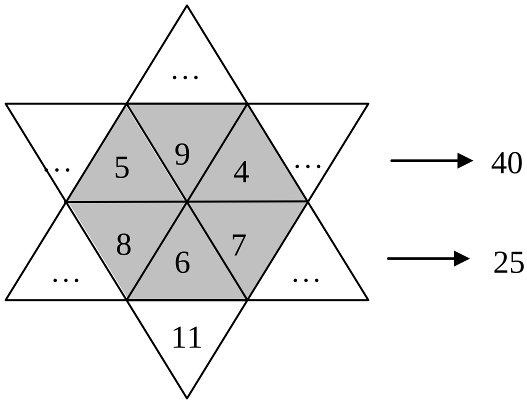
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena (adapté de *Chameaux et dromadaires* 5° RMT, I, 9 ; *La caravane* 11° RMT, I, 8)

6. ÉTOILE MAGIQUE (Cat. 3, 4, 5, 6)

Dans son livre de calcul, André a trouvé cette étoile. Quelques nombres y sont déjà inscrits.



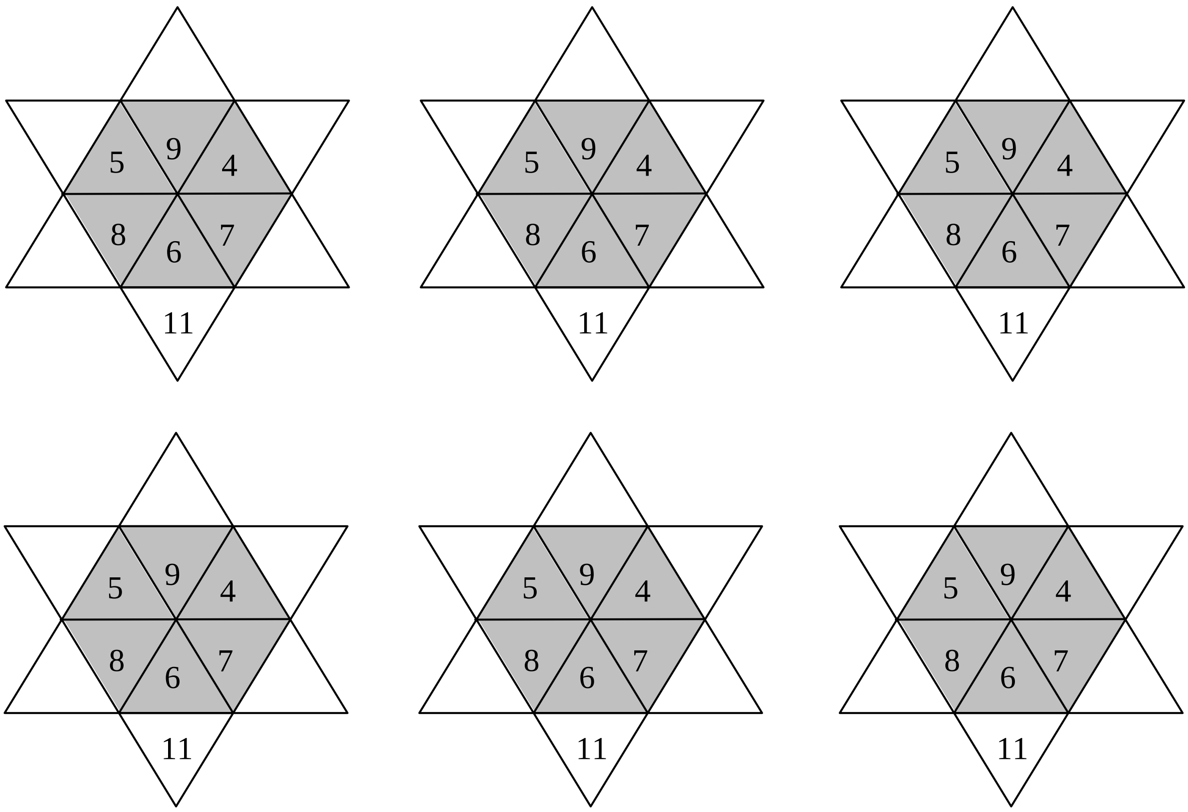
Il faut inscrire des nombres entiers dans les cases vides selon les indications suivantes :

- tous les nombres de l'étoile doivent être différents et inférieurs à 20,
- la somme des nombres qui se trouvent dans les triangles gris de l'étoile doit être égale à la somme des nombres qui se trouvent sur les pointes blanches de l'étoile,
- la somme des cinq nombres de la ligne où sont déjà inscrits 5, 9 et 4 doit être 40,
- la somme des cinq nombres de la ligne où sont déjà inscrits 8, 6 et 7 doit être 25.

De combien de manières différentes André pourra-t-il compléter l'étoile ?

Expliquez comment vous les avez trouvées.

Présentez vos réponses en utilisant une ou plusieurs des étoiles ci-dessous.



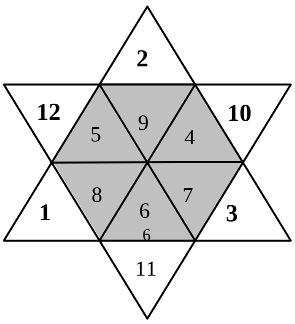
ANALYSE A PRIORI

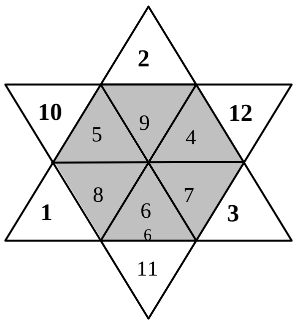
Domaine de connaissances

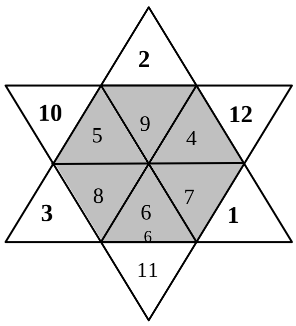
- Arithmétique: addition et soustraction

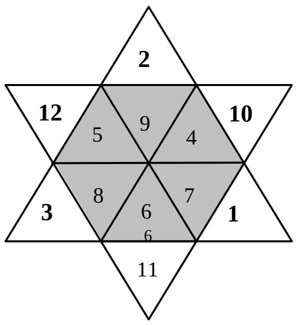
Analyse de la tâche

- Déterminer la somme des nombres à l'intérieur de l'étoile: 39.
- Puisque la somme des nombres de la deuxième ligne doit être 25, en déduire que la somme des deux nombres manquants est 25 – (8 + 6 + 7) = 4. Exclure le couple (0 ; 4) parce que le 4 est déjà utilisé et le couple (2 ; 2) parce qu'il comprend deux fois le même nombre, il ne reste que le couple (1, 3) pour les deux nombres manquants de la première ligne.
- De même, puisque la somme des nombres de la première ligne doit être 40, en déduire que la somme des nombres manquants de cette ligne est 40 – (5 + 9 + 4) = 22 et que les deux nombres manquants sont 10 et 12.
- Trouver que le nombre tout en haut de l'étoile est 2 car 39 – (22 + 4 + 11) = 2.
- Les nombres de la deuxième ligne ne pouvant être que 1 et 3, les nombres de la première ligne ne pouvant être que 10 et 12, il y a 4 étoiles possibles :







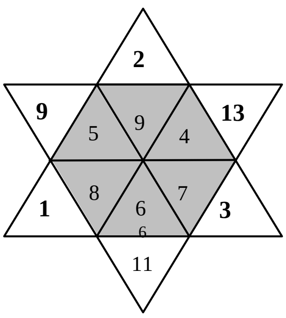


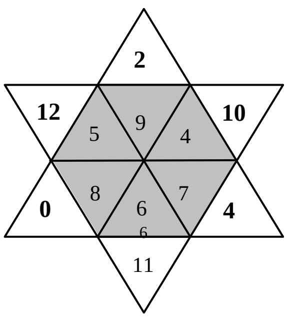
Attribution des points

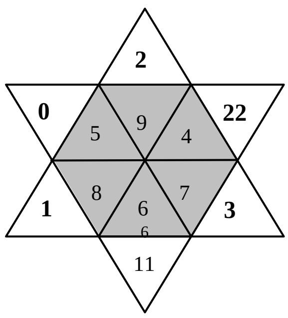
4 Réponse correcte (les quatre étoiles) avec explications claires sur la façon dont les nombres ont été trouvés

3 Réponse correcte avec explications incomplètes et éventuellement avec vérifications
ou éventuellement : les cinq nombres trouvés, avec explications, mais avec oubli d'une etoile

2 Réponse correcte (les quatre étoiles) sans aucune explication,
ou les cinq nombres trouvés, avec explications, mais avec oubli de deux ou trois étoiles
ou 4 étoiles vérifiant toutes les conditions à l'exception de celle qui exige que les nombres soient tous différents, par exemple :







deux fois le « 9 » deux fois le « 4 » avec le « 22 »

1 Une seule étoile sans aucune explication ou début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Parma

7. NAINS SUR LA BALANCE (Cat. 4, 5, 6)

Atchoum monte sur la balance avec Dormeur sur ses épaules. Blanche Neige observe que la balance indique 46 kg.
Maintenant, c'est Dormeur qui monte sur la balance avec Joyeux sur ses épaules. La balance indique 43 kg.
Finalement Joyeux monte sur la balance avec Atchoum sur ses épaules. Blanche Neige observe que la balance indique 39 kg.

Quel est le poids de chacun des trois nains : Atchoum, Dormeur et Joyeux ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations dans N
- Logique : compensation, équivalence, substitution

Analyse de la tâche

- Comprendre que les deux masses des nains s'additionnent lorsqu'ils sont deux sur la balance, mais indépendamment de celui qui porte l'autre (commutativité).
- Constater que Dormeur figure dans les deux premières pesées, avec Atchoum pour 46 kg et avec Joyeux pour 43 kg. En déduire que si on ne tient pas compte de la masse de Dormeur la différence de 3 kg entre les deux pesées vient d'une différence de masse entre Atchoum et Joyeux et qu'Atchoum a 3 kg de plus que Joyeux.
- Prendre en compte alors la masse de Atchoum et Joyeux ensemble, 39 kg, et la répartir en deux masses dont l'une vaut 3 de plus (ou de moins) que l'autre. En déduire que le plus léger, Joyeux, a une masse de 18 kg, la moitié de 36 = 39 – 3 ; (ou que le plus lourd, Atchoum, pèse 21 kg, la moitié de 42 = 39 + 3).
- La masse de Dormeur peut alors être calculée directement à partir de la première pesée : 46 – 21 = 25 (ou de la deuxième : 43 – 18 = 25) ou encore en reprenant le raisonnement initial, valable pour Dormeur et Joyeux car Atchoum figure dans la 1^{e} et la 3^{e} pesées de 7 kg de différence, (Dormeur : 25 kg et Joyeux 18 kg) ; ou encore pour Atchoum et Dormeur car Joyeux figure dans la 2^{e} et la 3^{e} pesées de 4 kg de différence. (Dormeur : 25 kg et Atchoum 21 kg).

Ou, calculer la masse totale des trois pesées 46 + 43 + 39 = 128 où chacun des trois nains figure deux fois ; en déduire que la somme des masses des trois nains (pris chacun une seule fois) est la moitié de 128, soit 64 kg. Calculer, successivement, la différence de chacune des trois pesées de deux nains avec la masse des trois : Joyeux, 64 – 46 = 18 ; Atchoum 64 – 43 = 21 ; Dormeur : 64 – 39 = 25.

Ou, par une démarche « préalgébrique », substituer « Atchoum » par « 3 de plus que Joyeux », tiré de la combinaison des deux premières pesées, dans la troisième qui devient « 2 fois Atchoum plus 3" font 39 kg », puis « 2 fois Atchoum font 36 kg » et finalement « Atchoum pèse 18 kg ».

Ou, procéder par essais et ajustements.

Attribution des points

4 Réponse complète et correcte (Joyeux, 18 ; Atchoum, 21 ; Dormeur, 25 en kg) avec explications claires

3 Réponse complète et correcte, mais avec des explications confuses ou partielles, ou seulement une vérification (21 + 25 = 46, 25 + 18 = 43 et 18 + 21 = 39)

2 Réponse complète et correcte sans explications ni vérification
ou raisonnement correct avec une erreur de calcul

1 Début de raisonnement qui montre seulement une ou toutes les différences entre deux nains, sans arriver au calcul des poids.

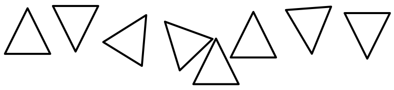
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

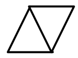
Origine : reprise du contexte « Les nains se pèsent » 18^{e} RMT F.2

8. PENTATRIANGLES (Cat 5, 6, 7)

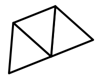
Aurélien et Bernadette ont trouvé au grenier une caisse contenant un grand nombre de triangles équilatéraux identiques.



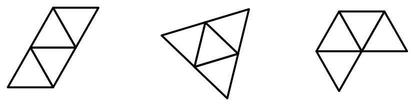
Un jour de pluie, ils se proposent de rechercher des figures qu'ils peuvent former en assemblant ces triangles, tels que deux triangles assemblés ont un côté commun.
Ils commencent par assembler deux triangles, ils essaient de les déplacer, de les tourner et les retourner et ne trouvent qu'une seule figure dessinée ici : un losange.
Ils décident d'appeler cette figure « bitriangle »:



De même en assemblant trois triangles, ils ne trouvent qu'une seule figure, un trapèze, qu'ils appellent « tritriangle » :



En continuant leur recherche ils cherchent toutes les figures qu'ils peuvent obtenir en assemblant quatre triangles : les « quadritriangles ». Ils en trouvent trois ; un parallélogramme, un triangle équilatéral plus grand et une figure en forme de « croissant » :



Ils cherchent maintenant à composer des figures avec 5 triangles : les « pentatriangles ».

Combien peuvent-ils trouver de « pentatriangles » en tout ?

Dessinez-les tous, dans n'importe quelle position, mais pas deux fois le même.

Expliquez comment vous avez trouvé vos solutions.

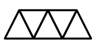
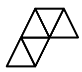
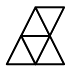
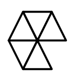
ANALYSE A PRIORI:

Domaine de connaissances

- Géométrie : construction de figures, isométrie, composition et recomposition de polygones
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour trouver les quatre pentatriangles sans en oublier, on peut commencer par aligner 5 triangles (*figure 1*), puis en aligner 4 et placer le 5e sur un "côté" et constater qu'il n'y a que deux possibilités, en faisant bien attention aux symétries axiales ou "retournements", translations et rotations, (*figures 2 et 3*).
- Finalement, constater qu'avec un alignement de 3 triangles, il n'y a qu'une seule figure possible. (*figure* 4) :

figure 1 :  *figures 2*  *figure 3 :*  *figure 4 :* 

Ou, partir des quadritriangles donnés dans l'énoncé et assembler à chacun d'eux un cinquième triangle dans les six positions possibles, comparer les configurations obtenues et ne garder que les quatre différentes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (4 pentatriangles) avec explications excluant l'existence d'autres pentatriangles
3 Réponse correcte : sans explications (sans répétitions et sans figure erronée)
2 Réponse partielle : trais pentatriangles trouvés ou bien réponse correcte mais comportant aussi des répétitions
1 Réponse partielle : un ou deux pentatriangles différents (répétitions admises)
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine: Genova

9. ARGENT DE POCHE (Cat. 5, 6, 7)

Avec sa famille, Monique fait un séjour de trois jours à Paris. Le grand-père de Monique lui a donné de l'argent de poche pour qu'elle puisse acheter quelques souvenirs.
Le premier jour, Monique dépense la moitié de l'argent reçu de son grand-père et 1 euro de plus.
Le deuxième jour, elle dépense la moitié de l'argent qui lui reste et 1 euro de plus.
Le troisième et dernier jour, elle dépense encore la moitié de ce qui lui reste et 1 euro de plus.
Au retour, Monique a encore 2 €.

Combien d'argent de poche Monique avait-elle au départ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : division, décomposition

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'on connaît la somme restante, qu'il faut donc commencer le raisonnement par le soir du 3e jour.
- Se rendre compte qu'il faut ajouter 1 à la somme restante de 2 € et multiplier ensuite par 2 pour trouver la somme du matin du 3e jour

  Continuer ainsi à remonter jusqu'au matin du 1er jour, avec éventuellement un tableau du genre :

	3e jour	2e jour	1er jour
Somme en fin de journée (€)	2 (au retour)	6	14
Somme en début de journée (€)	(2 + 1) x 2 = 6	(6 + 1) x 2 = 14	(14 + 1) x 2 = 30 (au départ)

Ou partir d'une certaine somme du matin au 1er jour, faire les divisions et soustractions nécessaires, vérifier l'exactitude du résultat final et modifier la somme initiale jusqu'à tomber sur la somme de départ de 30 € qui correspond à toutes les contraintes.

Attribution des points

4 Réponse correcte, 30 €, avec explications claires du raisonnement (permettant à partir de la somme restante le soir, de revenir à la somme du matin)

3 Réponse correcte, avec explications peu claires ou vérification seulement

2 Réponse correcte, sans explications
ou une réponse incorrecte due à une erreur de calcul seulement
ou réponse « 14 euros » due à une confusion entre le matin et le soir du premier jour

1 Début de recherche (avec au moins le calcul de la somme à disposition au matin du troisième jour : 6 €)

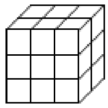
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine: Luxembourg (voir aussi *Pièces d'or* 7e RMT F.8)

10. TOURS DE 18 CUBES (Cat. 5, 6, 7)

Chaque élève d'une classe dispose de 18 cubes pour construire une « tour » en forme de brique (ou parallélépipède rectangle), sans trous.
André a construit une tour de trois étages qui sont constitués chacun de 6 cubes. (fig. 1)
Boris doit encore placer un cube, sa tour n'aura qu'un seul étage. (fig 2)
Chloé arrive, après plusieurs essais, à construire une tour de 18 étages, qui risque de s'écrouler si on la touche.



fig, 1 La tour d'André

fig. 2. La tour de Boris

Chaque élève compte les faces des cubes de sa tour qu'il peut voir : celles de dessus et des côtés.
Par exemple, André peut voir 36 faces : 9 devant, 9 derrière, 6 dessus, 6 à gauche et 6 à droite.
Lorsque Boris aura terminé sa tour, il pourra voir 40 faces de cubes : 18 dessus, 9 devant et 9 derrière, 2 à gauche et 2 à droite.
Laura observe sa tour et celle de son voisin et dit : « Ma tour a le même nombre de faces de cubes visibles que la tour de Guy, mais la mienne a 8 étages de plus que la sienne. »

Combien d'étages a la tour de Laura ? Combien d'étages a la tour de Guy ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations dans **N**, décomposition d'un nombre naturel en produit de 3 facteurs,
  Géométrie : géométrie plane, rectangle aire et périmètre ; géométrie dans l'espace, p.r. et volume

Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour trouver les tours des deux élèves, une possibilité est d'envisager toutes les constructions possibles de 36 cubes, en forme de p.r. en fonction de la « base » (face inférieure non visible) et espérer qu'on en trouvera deux qui aient le même nombre de faces visibles.

  Voici cet inventaire, organisé de la tour de 18 étages à celles de 1 étage :

étage	base	périmètre de base	aire latérale	nombre de faces visibles
18	1x1 = 1	4 x 1 = 4	4 x 18 = 72	72 + 1 = 73
9	2 x 1 = 2	(2 + 1) x 2 = 6	6 x 9 = 54	54 + 2 = 56
6	3 x 1 = 3	(3 + 1) x 2 = 8	8 x 6 = 48	48 + 3 = 51
3	6 x 1 = 6	(6 + 1) x 2 = 14	14 x 3 = 42	42 + 6 = 48
3	3 x 2 = 6	(3 + 2) x 2 = 10	10 x 3 = 30	30 + 6 = 36
2	9 x 1 = 9	(9 + 1) x 2 = 20	20 x 2 = 40	40 + 9 = 49
2	3 x 3 = 9	(3 + 3) x 2 = 12	12 x 2 = 24	24 + 9 = 33
1	18 x 1 = 18	(18 + 1) x 2 = 38	38 x 1 = 38	38 + 18 = 56
1	9 x 2 = 18	(9 + 2) x 2 = 22	22 x 1 = 22	22 + 18 = 40
1	6 x 3 = 18	(6 + 3) x 2 = 18	18 x 1 = 18	18 + 18 = 36

  On trouve 10 tours, de 6 hauteurs et 10 rectangles de base. Il n'y a que 8 nombres de faces visibles différents :

  33 36 36 40 48 49 51 56 56 73

  Il y a deux tours avec 36 faces visibles, de 1 et 3 étages et deux autres avec 56 faces visibles, de 1 et 9 étages.

  C'est donc ces deux dernières tours qu'il faut prendre en considération car elles ont 8 étages de différence. C'est la tour de Laura qui a 9 étages et celle de Guy qui n'en a que 1.

  Ou, en considérant la décomposition de 18 en facteurs (1, 2, 3, 6, 9, 18), dont l'un sera le nombre d'étages, constater qu'une différence de 8 étages ne peut exister qu'entre deux tours : celle de 1 et 9 étages… et vérifier.

Attribution des points

4 Réponse exacte et complète (Laura 9 et Guy 1) avec explications claires qui permettent de justifier l'unicité de la solution (inventaire complet, raisonnement sur les diviseurs de 18, …)

3 Réponse exacte et complète avec des explications qui ne permettent pas de justifier l'unicité de la solution, mais avec une vérification

ou inventaire incomplet (manquent de 1 à 3 tours) mais permettant toutefois d'obtenir les deux tours recherchées dont 56 faces sont visibles

2 Réponse exacte et complète sans aucune explication

ou inventaire incomplet (manquent de 1 à 3 tours) ne permettant pas de voir les deux tours recherchées

ou une ou deux erreurs de calculs dans l'inventaire complet, cohérent avec la réponse

ou inventaire complet mais en comptant les faces invisibles de la base

1 Recherche de quelques tours seulement avec un calcul correct des faces visibles

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : fj

11. LE RELAIS DE TRANSALPIE (Cat. 5, 6, 7, 8)

En Transalpie, chaque année a lieu une course de relais de 99 km.
Chaque équipe est composée d'au moins deux coureurs.
Dans chaque équipe, un coureur parcourt un nombre entier de kilomètres avant de passer le témoin au suivant.
Le coureur qui reçoit le témoin doit courir exactement 1 km de plus que celui qui l'a précédé.
On peut constituer des équipes, avec un nombre différent de coureurs. Les 99 km du parcours sont répartis selon le nombre de coureurs de l'équipe.
Par exemple on peut former une équipe de trois coureurs : le premier parcourt 32 km, le deuxième 33 et le troisième 34, ce qui donne bien 32 + 33 + 34 = 99.

Combien peut-il y avoir de coureurs dans une équipe ?

Trouvez toutes les possibilités et indiquez les distances parcourues par chacun des coureurs de chaque équipe possible.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations, décomposition d'un nombre en somme de nombres naturels consécutifs

Analyse de la tâche

- Transcrire la situation au niveau mathématique : il s'agit de trouver des décompositions de 99 en sommes de nombres naturels consécutifs et de se demander pour quels nombres de termes elles existent.
- La solution en deux termes, 49 + 50 = 99, est possible et facile à trouver, par exemple à partir de 50 (moitié de 100),

  la solution en trois termes, 32 + 33 + 34 est donnée,

  pour quatre termes, on peut travailler par approximations successives ou en partant directement de nombres proches de 25 (quart de 100) : 23 + 24 + 25 + 26 = 98 est trop petit, 24 + 25 + 26 + 27 = 102 est trop grand et il faut conclure qu'il ne peut pas y avoir d'équipes de quatre coureurs d'équipes, ,

  pour cinq termes, il n'y a pas non plus de solution ; on trouve en revanche une solution en six termes, en neuf termes et en onze termes. Au total, il y a 5 décompositions de 99 en sommes de nombres naturels consécutifs et donc **5 possibilités pour la formation des équipes :**

  2 coureurs : 49 + 50 = 99 **6 coureurs : 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = = 99**

  3 coureurs : 32 + 33 + 34 = 99 **9 coureurs : 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 99**

  11 coureurs : 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 99
- De nombreuses autres procédures permettent de trouver les cinq décompositions, mais font appel à une maîtrise plus élevée des propriétés des opérations. Par exemple : partir des sommes des premiers nombres naturels 1 + 2 = 3 ; 1 + 2 + 3 = 6 ; 1 + 2 + 3 + 4 = 10, etc, les soustraire de 99 et voir si la différence est un multiple de 2, de 3, de 4, etc ; ou constater que tous les nombres impairs sont la somme de deux nombres consécutifs, que les multiples de 3, 5, 7, … sont la somme respectivement de 3, 5, 7, … nombres consécutifs, etc.

Attribution des points:

4 Les 5 compositions d'équipes différentes (ou 4 sans mentionner celle de l'énoncé) avec les distances parcourues par chaque coureur et aucune composition incorrecte

3 4 compositions d'équipes différentes (ou 3 sans mentionner celle de l'énoncé) avec les distances parcourues par chaque coureur et aucune composition incorrecte

2 3 compositions d'équipes différentes (ou 2 sans mentionner celle de l'énoncé) avec les distances parcourues par chaque coureur et aucune composition incorrecte

ou les 5 compositions d'équipes différentes mais avec au maximum deux autres incorrectes

1 1 ou 2 compositions d'équipes différentes (autres que celle de l'énoncé) avec les distances parcourues par chaque coureur et aucune composition incorrecte

ou 3 ou 4 compositions d'équipes différentes mais avec au maximum trois autres incorrectes

0 Incompréhension du problème.

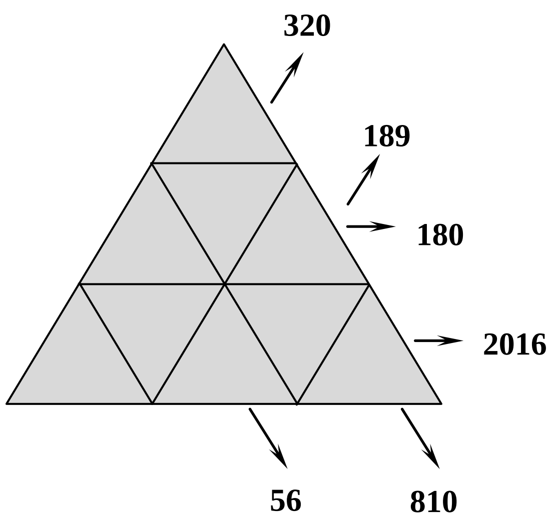
Niveaux : 5, 6, 7, 8

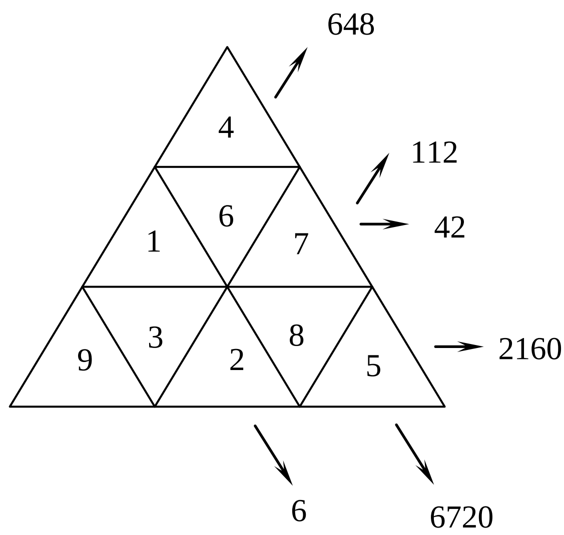
Origine : Suisse romande

12. PRODUITS EN TRIANGLES (I) (Cat. 6, 7, 8)

Ces triangles sont partagés en neuf cases triangulaires, dans lesquelles vous devez répartir les neuf nombres entiers de 1 à 9, un par case.
Le nombre sur lequel pointe la flèche est le produit des nombres écrits dans 3 cases alignées ou dans 5 cases alignées.

Triangle à compléter : Exemple d'un autre triangle, complété :





Complétez le triangle ci-dessus.

Expliquez comment vous avez procédé pour placer vos nombres.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : multiplication de nombres naturels, critères de divisibilité, factorisation ou décomposition en produit de nombres premiers

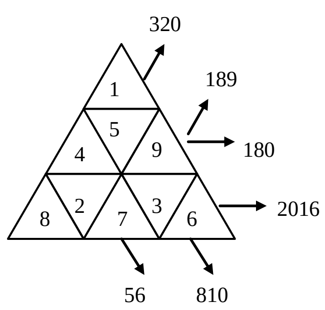
Analyse de la tâche

- Observer l'exemple, distinguer les alignements et vérifier les six produits correspondants indiqués.
  S'apercevoir qu'on ne peut pas procéder au hasard car il y aurait trop de possibilités et déterminer les triangles où certains nombres peuvent être placés et ceux où ils ne peuvent pas figurer, parce qu'ils sont diviseurs ou non d'un des facteurs de l'alignement. Par exemple, le 9, le 7, le 6 et le 3 ne peuvent figurer dans la case supérieure du premier triangle car ils ne sont pas des diviseurs de 320.
- En fonction de critères de divisibilité ou des factorisations des 6 produits donnés, chercher à placer d'abord les facteurs les plus « caractéristiques » (qui se reconnaissent le plus facilement) : 7, 5, 9 …). Trouver ainsi, par exemple que le 7 n'a qu'une case disponible dans le premier triangle, dans le rang inférieur au milieu, puisque le 8 ne peut être qu'en bas à droite dans ce triangle, …

Ou, commencer par décomposer les 6 produits en facteurs premiers : par exemple, dans le premier triangle,

$320 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$ indique que 3, 6, 7 et 9 ne peuvent figurer dans cet alignement qui doit par conséquent contenir les 5 autres facteurs 1, 2, 4, 5 et 8.

La solution est :



Attribution des points

4 Tous les nombres correctement placés avec des explications claires pour quelques nombres-clés
3 Tous les nombres correctement placés avec des explications peu claires
2 Tous les nombres correctement placés sans aucune explication
ou deux ou trois nombres mal placés, avec une ou deux erreurs de calcul
1 de 3 à 5 nombres correctement placés
0 Incompréhension du problème

Niveau : 6, 7, 8

Origine : Brochure « Ateliers »

13. LE CHIEN ET LE RENARD (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le chien Toby poursuit son ami Red le renard dans les bois. Il parcourt 85 mètres en 5 secondes tandis que Red parcourt 104 mètres en 8 secondes. Quand la poursuite a commencé, la distance entre les deux était de 320 mètres.

Combien de temps faudra-t-il à Toby pour rattraper Red ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances :

- Arithmétique : opérations dans **N**
- Mesures : distance, temps et vitesse
- Algèbre: équation du premier degré

Analyse de la tâche

- Pour les élèves qui ne maîtrisent pas le concept de vitesse, la procédure doit suivre l'écoulement du temps, seconde par seconde, après avoir transformé les données « 85 mètres en 5 secondes » et « 104 mètres en 8 secondes », respectivement en 17 et 13 mètres en une seconde, (ou 40 secondes par 40 secondes, ppmc de 8 et 5). On peut alors élaborer une progression comparée des animaux et de leur écart. Par exemple :

temps (s)	0	1	2	…	10	20	…	40	…	80
distance chien (m)	0	17	34	…	170	340	…	680	…	1360
distance renard (m)	0	13	26	…	130	260	…	520	…	1040
rattrapage (m)	0	4	8	…	40	80	…	160	…	320
écart (m)	320	316	312		280	200	…	160	…	0

Ou, se rendre compte, après avoir transformé les vitesses en m/s, que le chien rattrape 4 mètres par seconde et qu'il lui faudra 80 secondes (320 : 4) pour rattraper le renard, ou 1 minute et 20 secondes

Ou, algébriquement, les distances parcourues en x secondes par le chien ($17\,x$) et le renard ($13\,x$) en mètres conduisent à l'équation $320 = 17\,x - 13\,x$ et à sa solution $x = 80$ (en secondes) ou 1 minute et 20 secondes (les trois distances peuvent être représentés graphiquement).

(Pour le physicien, la relation entre vitesse, distance et temps sous la forme $d = vt$, permet de transcrire directement la différence des distances parcourues par le chien et le renard par l'équation
$(85/5)t - (104/8)t = 320$)

Attribution des points

4 Réponse correcte (80 s ou 1 min 20 s) avec des explications détaillées

3 Réponse correcte avec des explications peu claires

2 Réponse correcte sans aucune explication

1 Début de raisonnement correct (comparaison des deux vitesses soit par calcul soit par le début d'un tableau ...)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine: Riva del Garda

15. ROCCO ET SES FRÈRES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Rocco propose un jeu à ses quatre frères :
« Multipliez par 4 l'âge que vous aurez dans 4 ans. Ensuite, faites de même pour l'âge que vous aviez il y a 4 ans. Faites la différence de ces deux produits. Notez le nombre obtenu. »
À leur grand étonnement, les quatre frères trouvent tous le même nombre.

Quel est ce nombre?

Expliquez comment vous l'avez trouvé et pourquoi c'est toujours le même.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : opérations
- Logique : approche de la démonstration
- Algèbre : calcul littéral

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles du jeu et par essais successifs, trouver le nombre 32.
- Comprendre que quelques exemples ne suffisent pas, mais qu'il faut une justification pour tous les cas.
- Remarquer que, dans le calcul proposé, chacun ajoute puis retranche 4 fois son âge. Le résultat ne dépend donc pas de l'âge de l'enfant.
- Raisonner en disant que l'écart entre l'âge qu'on aura dans 4 ans et l'âge qu'on avait il y a 4 ans est de 8 ans. Multiplié par 4 cela donne le nombre 32.

Ou, comprendre que, pour une généralisation, l peut désigner l'âge par une variable, par exemple par la lettre a et écrire l'expression : $4(a + 4) - 4(a - 4)$ et la réduire. On obtient bien 32 pour tout a.

Ou représenter graphiquement les résultats obtenus après avoir multiplié par 4 et additionné ou soustrait 16; par exemple

--------- +16

---------- -16

et en déduire que la différence est toujours 32.

Attribution des points

4 Réponse correcte (32) avec explications claires (par formules algébriques ou éventuellement aussi verbalement)
3 Réponse correcte, mais avec des explications insuffisantes ou peu claires
2 Réponse correcte sur quelques exemples avec une tentative de généralisation (aussi verbale)
1 Réponse correcte avec au moins 5 essais sans aucune tentative de généralisation
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Bourg-en-Bresse

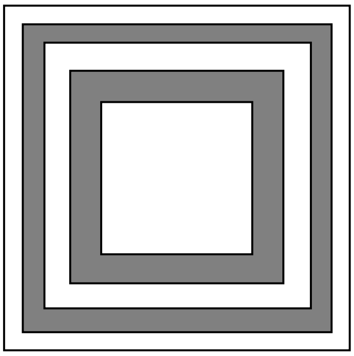
15. CARRÉS SUPERPOSÉS (Cat. 8, 9, 10)

Luc a une collection de carrés, dont les aires mesurées en dm^2 sont les premiers nombres entiers positifs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; …

Les carrés dont les mesures des aires sont des nombres impairs : 1, 3, 5, …(dm^2) sont blancs, les autres, dont les mesures des aires sont des nombres pairs : 2, 4, 6, 8, …(dm^2), sont gris.

Luc superpose les cinq premiers carrés de sa collection, avec leurs centres qui coïncident, leurs côtés parallèles, de manière à ce qu'il puisse voir au moins une partie de chacun d'eux.

La figure ci-dessous représente ces 5 premiers carrés, superposés : le premier carré est visible en entier, du 2^e^ carré on ne voit qu'un cadre gris, du 3^e^ on ne voit qu'un cadre blanc, et ainsi de suite.



Quelle est la largeur du cadre visible du 5^e^ carré ?

Luc continue à placer les carrés suivants : le 6^e^, le 7^e^, le 8^e^, le 9^e^, le10 ^e^ … de la même manière que les premiers, afin de voir un cadre de chacun d'eux. Il décide de s'arrêter dès que la largeur du dernier cadre visible sera inférieure à 5 mm.

Combien Luc devra-t-il superposer de carrés, au minimum, pour que la largeur du dernier cadre visible soit inférieure à 5 mm ?

Quand Luc a placé son dernier carré, il observe la figure obtenue et compare l'aire de la partie blanche visible avec celle de la partie grise visible.

L'aire de la partie blanche visible est-elle plus grande, égale ou plus petite que l'aire de la partie grise visible ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances :

- Arithmétique : racines carrées
- Géométrie: carrés, côté et aires
- Algèbre : suites, inéquations

Analyse de la tâche :

- Comprendre que tous les cadres ont la même mesure d'aire (1 dm^2), que de l'un au suivant la mesure des côtés augmente et que, par conséquent, la largeur du cadre diminue.
- Comprendre que les mesures des côtés des carrés sont : 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, …(en dm)
- Calculer la largeur des cadres successifs (moitié de la différence entre deux côtés successifs) :
  $(\sqrt{2} - 1)/2$, $(\sqrt{3} - \sqrt{2})/2$, $(2 - \sqrt{3})/2$, $(\sqrt{5} - 2)/2$, … (en dm) et en tirer la largeur du 5^e^ cadre :
  $(\sqrt{5} - 2)/2 \cong 0{,}118$ (dm) ou $50(\sqrt{5} - 2) \cong 11{,}8$ (mm)
- Poursuivre le calcul des largeurs de cadres, converties en mm jusqu'à $(\sqrt{25} - \sqrt{24})/2 \cong 0{,}0505$ dm = 5,05 mm, $(\sqrt{26} - \sqrt{25})/2 \cong 0{,}049$ dm $\cong 4{,}9$ et en déduire que le dernier carré posé par Luc est le 26^e^.

Ou, exprimer le terme général de la suite des largeurs $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})/2$ $(n > 1)$ et poser l'inéquation $\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2} < \frac{5}{100}$ dont la solution est $n >$ 25,50 correspondant à 26 carrés.

Se rappeler que le premier carré et chacun des cadres successifs ont une aire de 1 dm^2. Les deux parties blanche et grise ont donc la même aire lorsque le nombre de carrés superposés est pair alors que l'aire de la partie blanche est plus grande que celle de la partie grise pour un nombre impair de carrés.

- En superposant les 26 premiers carrés, les parties blanche et grise ont la même aire.

Attribution des points

4 Réponses correctes : $(\sqrt{5} - 2)/2$ cm, ou $\cong$ 0,118 dm ou $\cong$ 11,8 mm ; 26 carrés, les deux aires sont égales, avec explications claires

3 Réponses correctes mais avec des explications incomplètes

ou réponse à la première question (0,118 dm ou 11,8 mm) et réponses aux deux autres questions avec explications claires

2 Réponse à la première question (0,118 dm ou 11,8 mm) sans spécifier qu'il s'agit de valeurs approximatives, sans explications

ou réponse correcte à la première question ($\cong$ 0,118 dm ou $\cong$ 11,8 mm) et réponses 25 ou 27 à la deuxième question due à une erreur de calcul et réponse à la troisième question cohérente avec la deuxième

ou réponses correctes aux deux premières questions et erreur sur la troisième

1 Réponse correcte à une seule des trois questions

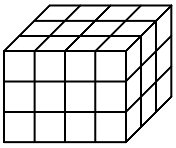
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Parma, fj

16. TOURS DE 36 CUBES (Cat. 8, 9, 10)

Chaque élève d'une classe dispose de 36 cubes pour construire une « tour » en forme de brique (ou parallélépipède rectangle), sans trous.
André a construit une tour formée de trois étages rectangulaires de 4 cubes sur 3 cubes. (fig. 1)
Boris doit encore placer deux cubes, sa construction n'aura qu'un seul étage (fig 2)
Claudia est arrivée, après plusieurs essais, à construire une tour de 36 étages, qui risque de s'écrouler si on la touche.



fig, 1 Construction d'André

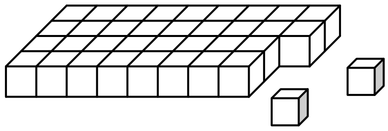


fig. 2. Construction de Boris

Chaque élève compte les faces des cubes de sa tour qu'il peut voir : celles de dessus et des côtés.
Par exemple André peut voir 54 faces : 12 devant, 12 derrière, 12 dessus, 9 à gauche et 9 à droite.
Lorsque Boris aura terminé sa tour, il pourra voir 62 faces de cubes : 36 dessus, 9 devant et 9 derrière, 4 à gauche et 4 à droite.
Daniel remarque que sa tour a le même nombre de faces visibles que celle de Gabriel, mais qu'elle a trois étages de plus.

Combien d'étages ont les tours de Daniel et de Gabriel ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations dans **N**, décomposition d'un nombre entier en produit de 3 facteurs,
- Géométrie : rectangle (aire et périmètre) ; parallélépipède rectangle (volume et aire latérale)

Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour trouver les briques des deux élèves, il faut envisager toutes les tours possibles de 36 cubes, en forme de parallélépipède rectangle en fonction de la « base » (face inférieure non visible) et chercher les cas où deux tours ont le même nombre de faces visibles et trois étages de différence.

  Voici cet inventaire, organisé seulement pour les tours ayant 3 étages de différence avec une autre :

étage	base	périmètre de base	aire latérale	nombre de faces visibles
12	3 x 1 = 3	(3 + 1) x 2 = 8	8 x 12 = 96	96 + 3 = 99
9	4 x 1 = 4	(4 + 1) x 2 = 10	10 x 9 = 90	90 + 4 = 94
9	2 x 2 = 4	(2 + 2) x 2 = 8	8 x 9 = 72	72 + 4 = 76
6	6 x 1 = 6	(6 + 1) x 2 = 14	14 x 6 = 84	84 + 6 = **90**
6	3 x 2 = 6	(3 + 2) x 2 = 10	10 x 6 = 60	60 + 6 = 66
4	9 x 1 = 9	(9 + 1) x 2 = 20	20 x 4 = 80	80 + 9 = 89
4	3 x 3 = 9	(3 + 3) x 2 = 12	12 x 4 = 48	48 + 9 = 57
3	12 x 1 = 12	(12 + 1) x 2 = 26	26 x 3 = 78	78 + 12 = **90**
3	6 x 2 = 12	(6 + 2) x 2 = 16	16 x 3 = 48	48 + 12 = 60
3	4 x 3 = 12	(4 + 3) x 2 = 14	14 x 3 = 42	42 + 12 = 54
1	36 x 1 = 36	(36 + 1) x 2 = 74	74 x 1 = 74	74 + 36 = 110
1	18 x 2 = 36	(18 + 2) x 2 = 40	40 x 1 = 40	40 + 36 = 76
1	12 x 3 = 36	(12 + 3) x 2 = 30	30 x 1 = 30	30 + 36 = 66
1	9 x 4 = 36	(9 + 4) x 2 = 26	26 x 1 = 26	26 + 36 = 62
1	6 x 6 = 36	(6 + 6) x 2 = 24	24 x 1 = 24	24 + 36 = 60

  On trouve 15 tours et il y a 4 couples de nombres égaux de faces visibles :

  54 57 **60** **60** 62 **66** **66** **76** **76** 89 **90** **90** 94 99 110

mais seulement un cas où une brique a 3 étages de plus que l'autre : 90 et 90 pour les briques de 6 étages (Daniel) et 3 étages (Gabriel).

Attribution des points

4 Réponse exacte et complète (Daniel 6, Gabriel 3) avec détail de l'inventaire complet (avec dimensions des briques) avec une explication claire qui garantit l'unicité

3 Réponse exacte et complète mais sans l'inventaire qui permet de justifier l'unicité de la solution ou seulement une vérification

ou inventaire incomplet (1 à 4 briques oubliées) mais permettant toutefois d'obtenir les deux briques recherchées

2 Réponse exacte et complète, sans aucune explication

ou inventaire incomplet (1 à 4 briques oubliées) ne permettant pas de découvrir la solution

ou une ou deux erreurs de calculs dans l'inventaire complet

ou inventaire complet mais en comptant les faces invisibles de la base

1 Début de recherche de 2 à 4 tours seulement avec un calcul correct des faces visibles

0 Incompréhension du problème

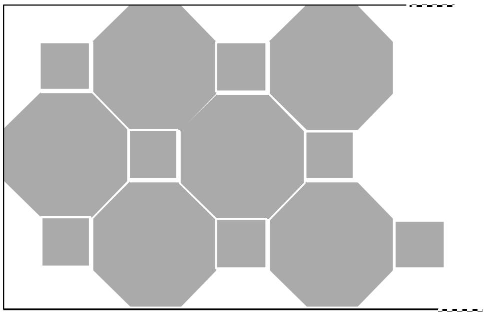
Niveaux : 8, 9, 10

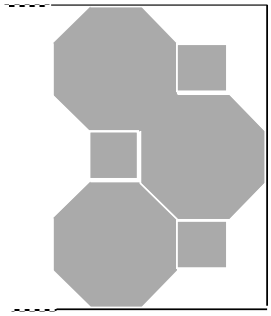
Origine : fj

17. FRISES (Cat 8, 9, 10)

Paul a dessiné une frise avec des carrés et des octogones réguliers.

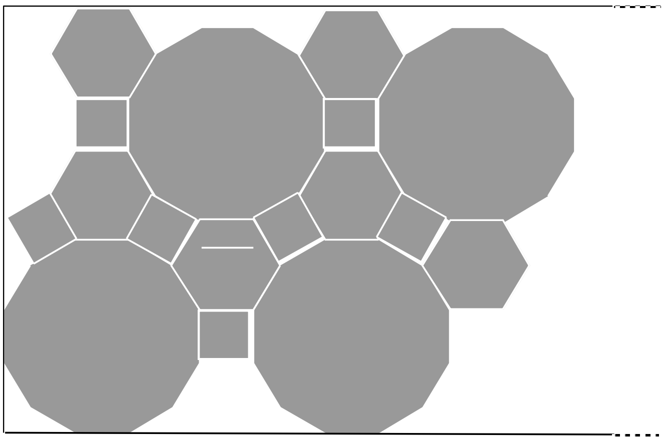
Voici le début de son travail: et voici la fin:

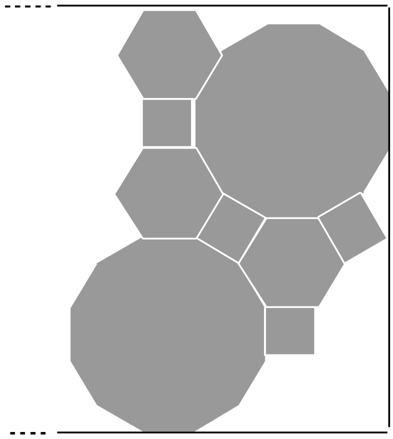




Jules a lui aussi dessiné une frise avec des carrés identiques à ceux de Paul et des hexagones et dodécagones réguliers.

Voici le début de son travail: et voici la fin:





Les deux frises n'ont pas la même longueur, mais, lorsqu'elles sont complètes, elles ont le même nombre de carrés qui est compris entre 20 et 30.

Combien y a-t-il de carrés dans chaque frise ?

Combien y a-t-il d'octogones dans la frise de Paul ?

Combien y a-t-il d'hexagones dans la frise de Jules ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

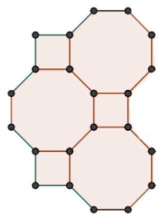
Domaines de connaissances:

- Géométrie : frises, isométries
- Arithmétique : addition, multiples
- Logique

Analyse de la tâche

- Comprendre comment se construit chacune des deux frises en reconnaissant un motif répété (qui permet de « paver » la frise).
- Pour la frise de Paul, il faut ajouter 2 carrés (au début ou à la fin) aux 3 carrés contenus dans le motif répété de la figure ci-contre : le nombre de carrés est donc du genre 3n + 2.

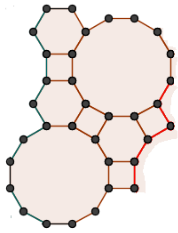
  (On peut aussi, sans compter les motifs répétés, voir qu'il manque un carré à droite et que le nombre de carrés vaut un de moins qu'un multiple de 3.)

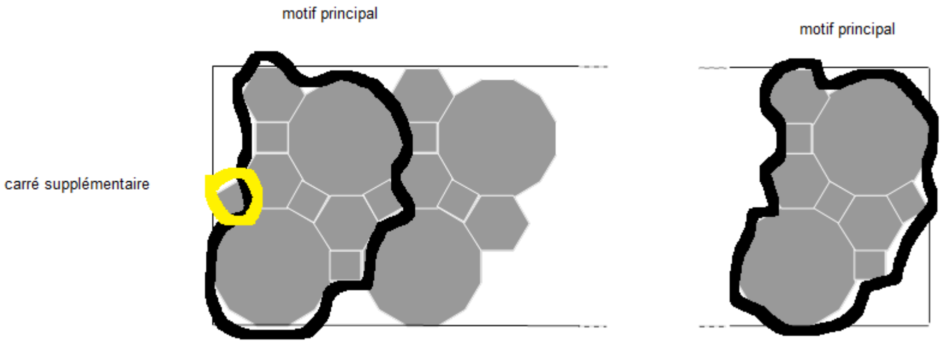


un exemple de motif répété de la frise de Paul

- Pour la frise de Jules le motif répété est composé de 4 carrés. En choisissant celui de la figure ci-contre il faut ajouter un carré à gauche. Le nombre de carrés est donc égal à 4m + 1

un exemple de motif répété de frise de Jules :





- On obtient ainsi les deux suites de nombres suivantes :
  Nombre de carrés dans la frise de Paul : 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ;23 ;26 ; 29 ; …
  Nombre de carrés dans la frise de Jules : 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25; 29 ; …
  Constater que le seul nombre commun compris entre 20 et 30 est 29.
- En déduire que le motif principal de la frise de Paul se répète 9 fois (29 = 9 x 3 + 2)
  Comme le motif principal contient 3 octogones et qu'il faut ajouter un octogone supplémentaire (au début ou à la fin), on obtient : 9 x 3 + 1 = 28 octogones.
- En déduire que le motif principal de la frise de Jules se répète 7 fois (29 = 7 x 4 + 1) et qu'à la fin, il n'y a plus d'hexagones à dessiner. Vu que dans chaque motif, il y a 3 hexagones, le nombre d'hexagones est égal à 7 x 3 = 21.

Attribution des points

4 Réponses correctes (29 carrés, 28 octogones, 21 hexagones) avec explications complètes

3 Réponses correctes, avec explications incomplètes

2 Réponses correctes sans aucune explication ni justification
ou deux réponses correctes avec élément de justification (un motif répété)

1 Début de recherche cohérente ou une seule réponse correcte

0 Incompréhension du problème

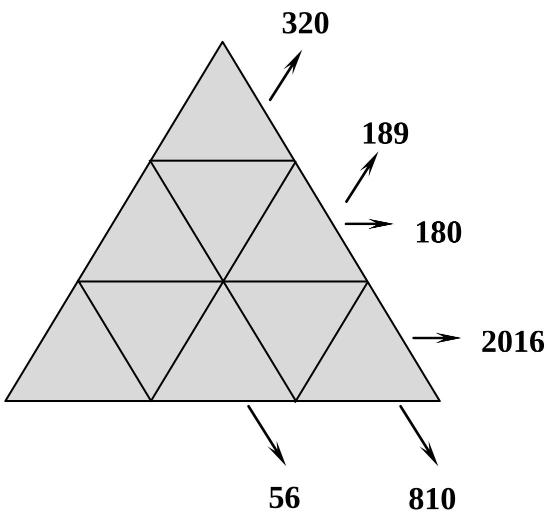
Niveau : 8, 9, 10

Origine : Bourg-en-Bresse

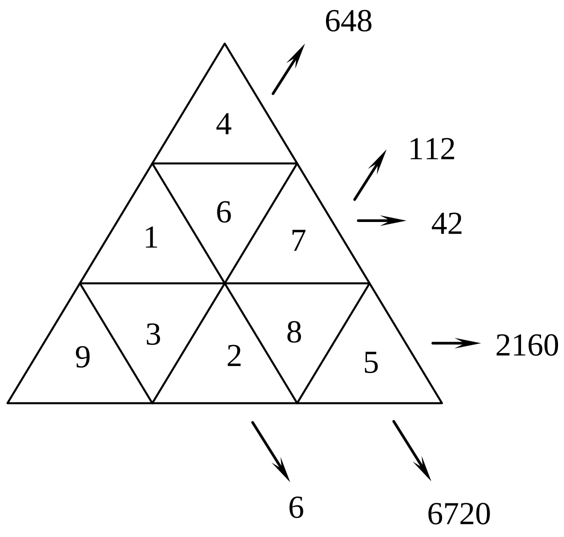
18. PRODUITS EN TRIANGLES (II) (Cat. 9, 10)

Ces triangles sont partagés en neuf cases triangulaires, dans lesquelles vous devrez répartir les neuf nombres entiers de 1 à 9, un par case. Pour chaque alignement de 5 cases ou de 3 cases (indiqués par les flèches) on a écrit le produit des nombres contenus dans les cases de l'alignement.

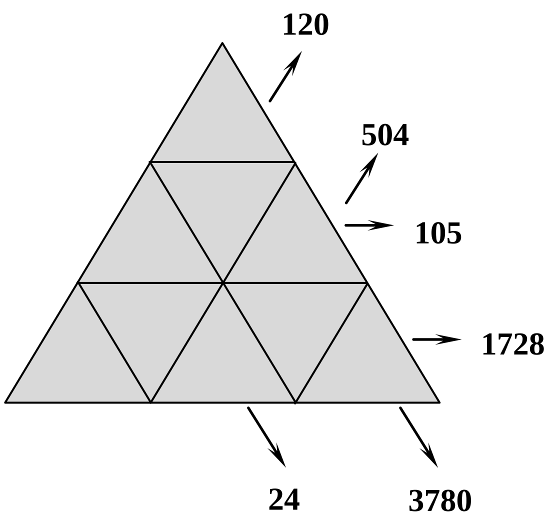
Triangle à compléter :



Exemple de triangle, complété :



Complétez le triangle ci-dessus.
Expliquez comment vous avez procédé pour trouver vos nombres.
Puis complétez encore le triangle ci-dessous.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : critères de divisibilité par 5 et par 3 et 9 ; décomposition d'un entier en produit de facteurs

Analyse de la tâche

- Observer l'exemple, distinguer les alignements et vérifier les 6 produits correspondants indiqués.

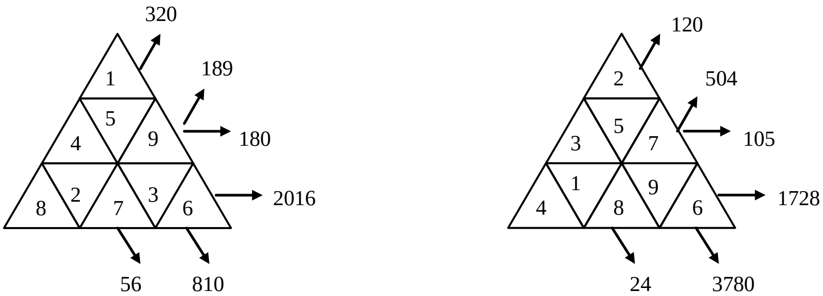
  S'apercevoir qu'on ne peut pas procéder au hasard car il y aurait trop de possibilités et déterminer les triangles où certains nombres peuvent être placés et ceux où ils ne peuvent pas figurer, parce qu'ils sont diviseurs ou non d'un des facteurs de l'alignement. Par exemple, le 9, le 7, le 6 et le 3 ne peuvent figurer dans la case supérieure du premier triangle car ils ne sont pas des diviseurs de 320.

- En fonction de critères de divisibilité ou des factorisations des 6 produits donnés, chercher à placer d'abord les facteurs les plus « caractéristiques » (qui se reconnaissent le plus facilement) : le 5 et le 7 aux intersections des lignes donnant des produits dont ils sont facteurs premiers. Trouver ainsi, par exemple que le 7 n'a qu'une case disponible dans le premier triangle, dans le rang inférieur au milieu. puisque le 8 ne peut être qu'en bas à droite dans ce triangle, …
- Compléter ensuite le triangle en partant des lignes à 3 cases et en utilisant les critères de divisibilité par 3 ou par 9.

Ou, commencer par décomposer les 6 produits en facteurs premiers : Par exemple, dans le premier triangle,

$320 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$ indique que 3, 6, 7 et 9 ne peuvent figurer dans cet alignement qui doit par conséquent contenir les 5 autres facteurs 1, 2, 4, 5 et 8.

Les solutions sont :



Attribution des points

4 Tous les entiers correctement placés dans les deux triangles avec des explications claires

3 Tous les entiers correctement placés dans les deux triangles sans explication

2 Tous les entiers correctement placés dans un des deux triangles avec des explications claires

1 Tous les entiers correctement placés dans un des deux triangles sans explication

0 Incompréhension du problème

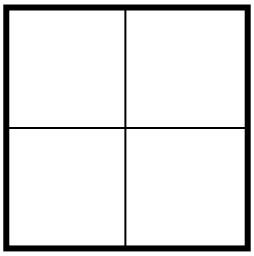
Niveau : 9, 10

Origine : Brochure « Ateliers »

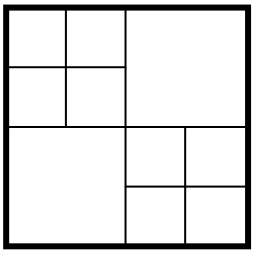
19. QUE DE CARRÉS ! (Cat. 9, 10)

Les élèves d'une classe cherchent à subdiviser entièrement un carré en carrés plus petits, qui peuvent être de grandeurs différentes.

Par exemple Jean a trouvé une subdivision en 4 carrés :

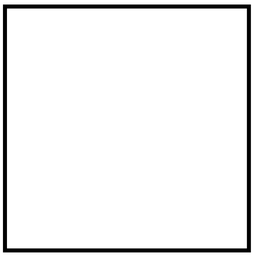
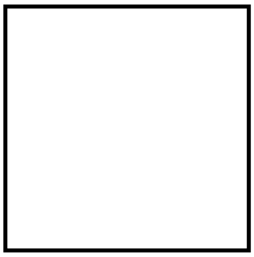
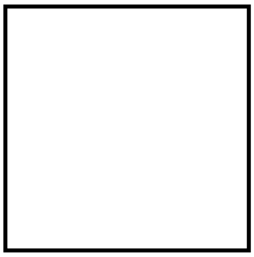
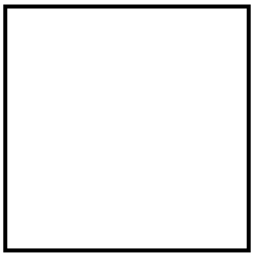


Lise en a trouvé une en 10 carrés



Les élèves cherchent à trouver des subdivisions en d'autres nombres de carrés : 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 ...
Luc a trouvé des subdivisions en 7, 11, 12 et 17 carrés.

Trouvez, vous aussi des subdivisions en 7 carrés 11, 12 et 17 carrés et dessinez-les ici.

Indiquez ensuite tous les autres nombres pour lesquels il est possible de trouver une subdivision d'un carré en carrés plus petits.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

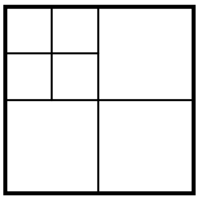
- Géométrie : carrés

Analyse de la tâche

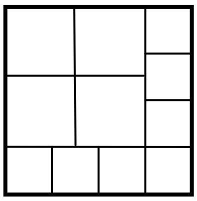
- Après avoir compris les règles de partage, chercher les quatre subdivisions demandées. Celle en 7 parties se trouve facilement à partir de celle en 4 parties, en remplaçant un carré par quatre plus petits ; les autres se trouvent par un même principe à partir des subdivisions précédente, ou d'une autre subdivision en un nombre pair de carrés (voir le partage en 12 carrés ci-dessous).

  Voici un exemple, parmi de nombreux autres, pour chacune des subdivisions demandées :

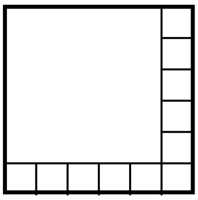
  en 7 carrés :

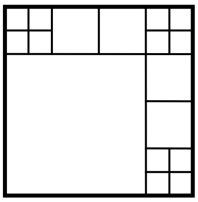
  en 11 carrés :

  en 12 carrés :

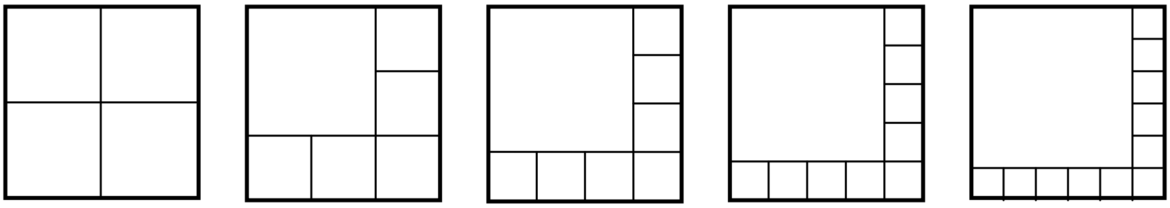
  en 17 carrés :

- Envisager une recherche systématique :

  à partir de la subdivision en 4 carrés, (un carré partagé en 4 carrés plus petits donne une subdivision en 3 carrrés de plus) on obtient une suite de raison 3 : 1, 4, 7, 10, 13, 16, … carrés (de teme général $3n + 1$)

  on peut aussi obtenir toutes les divisions en nombres pairs de carrés à partir de 4 : n petits carrés sur deux côtés adjacents du grand, qui donne la suite 4, 6, 8, 10, 12, …, $2n$:



- On constate que, en combinant les deux suites précédentes, on peut obtenir tous les nombres naturels 1, 4, 6, 7, 8, 9 (6 + 3), 10, 11 (8 + 3), 12, 13, 14, … sauf 2, 3 et 5.

  Il est évident qu'il est impossible de subdiviser un carré en deux carrés, de même qu'en trois carrés.

  Il est clair qu'on ne peut pas envisager la subdivision en 5 carrés égaux. On ne peut pas non plus envisager la subdivision en 5 carrés inégaux.

Attribution des points :

4 Réponse correcte et complète (dessins des quatre subdivisions en 7, 11, 12 et 17 carrés ; généralisation pour tous les entiers naturels à l'exception de 2, 3, et 5) avec explications claires qui montrent les possibilités de subdivision

3 Réponse correcte à la première question (dessins pour 7, 11, 12 et 17 carrés) et affirmation de l'impossibilité pour les cas 2, 3, 5 sans arriver à généraliser à tous les autres nombres naturels, mais avec tentatives qui font apparaître au moins une suite de subdivisions

2 Réponse correcte à la première question et détermination d'autres subdivisions pour au moins 5 nombres avec explications claires

ou réponse correcte à la première question prima avec l'affirmation de l'impossibilité pour les cas 2, 3, 5, sans tentative de généralisation

1 Début de recherche, par exemple trois des dessins demandés

0 Incompréhension du problème

Niveau : 9, 10

Origine : LU et 6^{e}RMT F.12