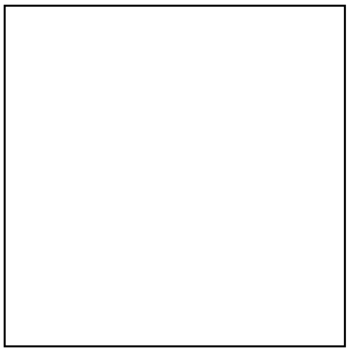
Titre	Catégories	Thème	Origine
1. Le gâteau carré	3 4	géométrie	1.F.8
2. La varicelle	3 4	arithmétique (nombres naturels)	LU
3. Chemin d'allumettes	3 4 5	combinatoire	1.F.10
4. Le tapis de Mme Doudouche	3 4 5	géométrie, mesure, arithmétique	lg, fj
5. Fenêtres éclairées	3 4 5	logique	SI
6. Les bonbons	4 5 6	arithmétique, combinatoire	PR
7. Tom et Lou	5 6	arithmétique (nombres naturels)	LU
8. Le verger de tante Marie	5 6 7	arithmétique	AO
9. Que de parallélogrammes	5 6 7	géométrie	LU
10. Parts de tartes	6 7 8	arithmétique (fractions)	BB
11. Pas si simple	6 7 8	arithmétique (nombres décimaux)	BB
12. Quitte ou Triple	6 7 8 9	arithmétique	LO

1. LE GATEAU CARRE (Cat 3, 4)

Quatre enfants se retrouvent pour manger un gâteau carré.
- Chaque enfant veut avoir la même quantité de gâteau.
- Deux enfants veulent une part de gâteau de forme carrée.
- Les deux autres enfants veulent une part de gâteau de forme triangulaire.

Dessinez sur ce carré, un partage qui peut contenter chaque enfant :



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Partager un carré en 4 parts de même aire : 2 carrés et 2 triangles

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème : partager le carré en 4 parts de même aire avec 2 carrées et 2 triangles.
- Stratégie par essais de carrés découpés puis de triangles (probablement rectangles).
- Stratégie déductive :
  - Déduire des données que chaque part représente 1/4 du carré initial ;
  - Comprendre que pour partager le carré initial en 4 parts carrées identiques, il faut partager le côté du carré en 2 segments de même longueur ; (*figure 1*)
  - Comprendre qu'il faut garder 2 de ces carrés et transformer l'espace occupé par les 2 autres carrés en 2 triangles ;
  - Comprendre que 2 carrés adjacents peuvent être partagés en 2 triangles rectangles identiques (donc de même aire que chaque carré) : la justification n'est pas demandée (mais un contrôle par découpage et superposition est possible), puis faire les tracés correspondants (voir *exemple avec la figure 2*).

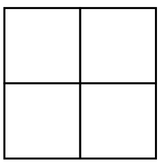


figure 1

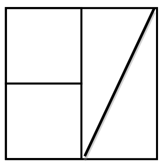


figure 2

  - Comprendre que chaque enfant doit avoir l'équivalent de 1 carré. Partager un carré en deux demi-carrés et rechercher comment il est possible d'obtenir un triangle en assemblant deux demi-carrés (assemblage par un côté de l'angle droit). On obtient un triangle rectangle isocèle qui a pour côté de l'angle droit une diagonale d'un carré.

    Chercher ensuite comment il est possible de loger 2 de ces triangles dans un carré 2 x 2.

Attribution des points

4 Solution correcte avec tracés précis et complet

3 Solution complète avec tracés ambigus (par exemple les triangles sont apparents, mais pas clairement délimités, figure surchargée par des tracés inutiles…)

2 Le partage en 4 carrés est réalisé, mais les 2 triangles ne sont pas trouvés ou faux

1 Essai avec des carrés ou des triangles identiques, mais recherche non aboutie
ou partage en 2 triangles rectangles (demi-carrés), puis blocage

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : 1.F.8

2. LA VARICELLE (Cat. 3, 4)

Dans la classe d'Anna, il y a quatre filles de plus que de garçons.

Aujourd'hui, en raison d'une épidémie de varicelle, la moitié des garçons et la moitié des filles sont malades et ne sont pas venus à l'école.

Il ne reste que 14 élèves en classe.

Combien de filles et combien de garçons sont malades ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Trouver 2 nombres, dont la somme est égale à 14 et dont la différence des doubles est égale à 4.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes arithmétiques du problème (voir tâche mathématique).
- Les stratégies suivantes sont plus rapides ou plus économiques si les élèves se rendent compte que les nombres totaux de filles et garçons sont pairs (pour qu'on puisse en prendre la moitié)
- Stratégie par essais et ajustements de nombres respectant les contraintes énoncées successivement : essai (hypothèse) respectant les 4 élèves de différence, calcul de la moitié de chaque nombre (malades ou présents), addition des restes et vérification pour savoir si cette somme est 14.
- Stratégie par inventaires des cas, par exemple en commençant l'énumération à 2 pour garçons et donc à 6 (2 + 4) pour les filles et vérification de la 2e condition (cette organisation peut apparaître, mais pas sous forme de tableau), par exemple :

Garçons	Filles	Moitié des garçons	Moitié des filles	**Somme des moitiés**
2	6	1	3	**4**
4	8	2	4	**6**
6	10	3	5	**8**
…	…	…	…	**…**

  L'inventaire peut s'arrêter lorsque la somme 14 est atteinte en remarquant que la suite des sommes est croissante.

- Procéder de même, mais en partant des élèves malades (ou présents) et en considérant qu'il y a 2 filles de plus que de garçons.
- Comprendre que dans chacune des deux moitiés d'élèves, le nombre de filles dépasse de 2 le nombre garçons, puis qu'en soustrayant 2 de 14 on obtient deux fois le nombres de garçons présents. Par conséquent le calcul (14-2) : 2 = **6** donne le nombre garçons présents bleus et 6 + 2 = **8** le nombre de filles présentes.
- Raisonner en partant du nombre initial d'élèves (28 = 14 x 2). En soustrayant les 4 filles de plus de plus, on obtient le double du nombre de garçons (24 = 28 - 4). En déduire le nombre de garçons (12 = 24: 2) et celui des filles (16 = 12 + 4), puis le nombre garçons et de filles malades (la moitié des nombres précédents). Ce raisonnement peut aussi conduire à la suite de calculs : (28 – 4) : 2 = 12, 12 + 4 = 16, 12 : 2 = **6,** 16 : 2 = **8.**

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (8 filles malades, 6 garçons malades) avec explications claires et détaillées

3 Une des deux réponses correctes avec explications claires et détaillées et l'autre absente ou erronée (suite à une erreur de calcul)
ou les deux réponses correctes avec explication absente ou incomplète

2 Procédure correcte, mais réponses erronées dues à une erreur de calcul
Réponses respectant les quantités totales d'élèves (16 filles et 12 garçons)

1 Début de recherche cohérente
ou réponses du type "9 filles et 5 garçons" (total = 14 et écart = 4)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : d'après Luxembourg (problème Tom et Lou)

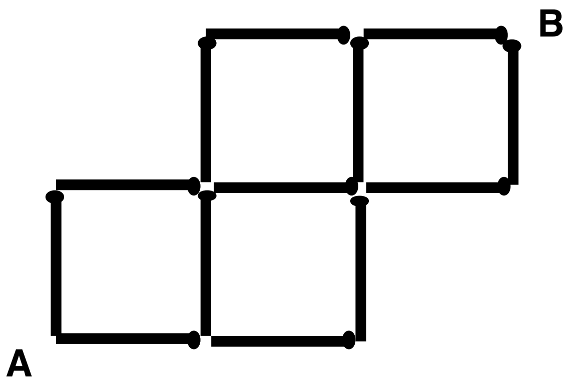
3. CHEMIN D'ALLUMETTES (Cat. 3, 4, 5)

Trois enfants on fait un dessin avec des allumettes. Ils cherchent les chemins les plus courts pour aller de A à B en imaginant qu’ils suivent les allumettes.

Anatole dit : *Il y a cinq chemins différents*.

Berthe lui répond : *J’en ai trouvé sept, deux de plus que toi, et il n’y en a pas d’autres.*

Zoé n'est pas d'accord : *Vous êtes nuls, il y a dix chemins différents.*



L’un des trois enfants a-t-il raison ?

Expliquez pourquoi et montrez bien comment vous avez fait pour répondre.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Trouver tous les chemins qui peuvent être tracés sur une portion de quadrillage en se déplaçant uniquement vers le haut ou vers la droite.

Analyse de la tâche

Se rendre compte que, vu les avis divergents, l’enjeu du problème est de déterminer le nombre de chemins différents, après avoir constaté que les chemins les plus courts sont constitués de 5 allumettes : 3 ➔ et 2 🡅

- Comprendre les contraintes du problème et leur conséquence : un chemin de 5 allumettes ne peut être réalisé qu'en se déplaçant vers la droite ou vers le haut.
- Stratégie par tracé effectif de chemins, sans organisation au départ, puis avec une organisation progressive en essayant de trouver des chemins différents de ceux déjà obtenus. Il faut relever ici que les huit chemins, de couleurs différentes, sur un même dessin sont absolument illisibles et que c’est aux élèves de penser à tracer les chemins sur plusieurs dessins.
- Stratégie consistant à noter sur chaque extrémité, à partir de A, le nombre de chemins qui y mènent et, lorsqu’il y a intersection, de calculer la somme des deux chemins qui y mènent.

	2	**5**	**8** (B)
1	**2**	**3**	3
0 (A)	1	1	

Ou : changer de cadre en utilisant un codage du type *h* (vers le haut) et *d* (vers la droite) et chercher à produire toutes les séquences de 5 lettres compatibles avec la portion de quadrillage repésentée par les allumettes. La recherche de toutes les séquences peut être organisée ou non. Une organisation du type arbre peut être envisagée (avec 2*h* et 3*d*) ou simplement la recherche des 10 arrangements de trois “*d*” et deux “*h*” en éliminant ceux qui ne respectent pas les contraintes liées au dessin par exemple trois d de suite ou deux h de suite pour commencer.

ddhdh ddhhd dhddh dhdhd dhhdd hdddh hddhd hdhdd

Dans tous les cas, terminer en dénombrant les chemins pour pouvoir affirmer qu’aucun des trois enfants a raison

Attribution des points

4 Réponse correcte (les trois enfants ont tort car il y a 8 chemins) avec tracés bien distinguables ou représentations par des suites de symboles

3 Réponse correcte (les trois enfants ont tort car il y a 8 chemins) mais tracés peu lisibles, (tous sur le même dessin) ou 8 tracés explicites, réponse « les trois enfants ont tort » non formulée

2 L’un des enfants a raison (7 ou 10 tracés) ou les trois ont tort avec 6, 7 chemins tracés de façon explicite ou plus de 8 chemins dénombrés, mais au moins 6 chemins tracés respectant les contraintes de l’énoncé (erreur dans le dénombrement dû à des tracés superposés)

1 Réponse avec 4 ou 5 tracés

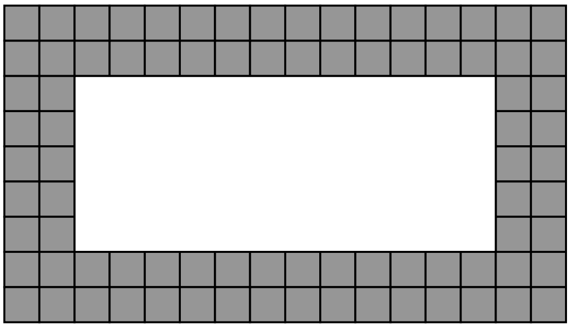
0 Incompréhension du problème ou pas plus de 3 chemins tracés

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : 1F10

4. LE TAPIS DE MME DOUDOUCHE (Cat. 3, 4, 5)

Madame Doudouche a un beau tapis dans sa salle de bain, avec deux rangs de carrés gris sur les bords et une partie centrale blanche. Voici un dessin de son tapis:



Elle aimerait s'acheter un nouveau tapis.
Son nouveau tapis doit avoir la même longueur que celui-ci.
Mais la largeur de la partie blanche du nouveau tapis doit être le double de la largeur de la partie blanche du premier tapis.
Elle souhaite que son nouveau tapis possède aussi deux rangs de carrés gris sur le bord, comme sur le premier tapis.

Combien y aura-t-il de carrés gris sur le bord de son nouveau tapis.

Explicitez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Un rectangle donné étant entouré d'une double bande de petits carrés, trouver combien de petits carrés composent la double bande qui entoure un rectangle de même longueur que le premier et de largeur double.

Analyse de la tâche

- Comprendre que la partie blanche est doublée seulement dans le sens de la largeur.
- Une première stratégie consiste à construire ou imaginer le nouveau rectangle et à trouver une méthode de dénombrement des carrés gris.

  - Pour cela, après avoir observé le dessin, déterminer que la partie blanche du nouveau tapis doit avoir deux fois la largeur de l'autre, mais la même longueur et donc que la partie blanche du nouveau tapis est un rectangle de 12 x 10 (soit 120 carrés) et que le nouveau tapis est un rectangle de 16 x 14 (soit 224 carrés)
- Pour déterminer le nombre de carrés du bord, il est possible d'utiliser :

  - une procédure de dénombrement par comptage de tous les carrés gris sur un dessin ;

  - une procédure de dénombrement des carrés gris en imaginant par exemple le nouveau tapis entouré d'une première bande grise fixée à la partie blanche composée de 12 +12 +10 +10 + 4 carrés (en référence au «périmètre»), puis d'une deuxième bande composée de 14 +14 +12 +12 + 4 carrés pour un total de 104 carrés ;
- Une deuxième stratégie consiste à dénombrer le nombre de carrés gris du tapis initial (mêmes procédures que ci-dessus, ce qui donne 84 carrés) et à dénombrer les carres gris ajoutés dans la « transformation » du tapis initial en tapis final, les carrés gris étant ajoutés uniquement sur chacune des largeurs, soit 10 carrés (2 fois 5) pour chaque largeur, donc au total 20 carrés gris de plus que sur le tapis initial, soit 104 carrés (84 + 20 = 104).

Attribution des points

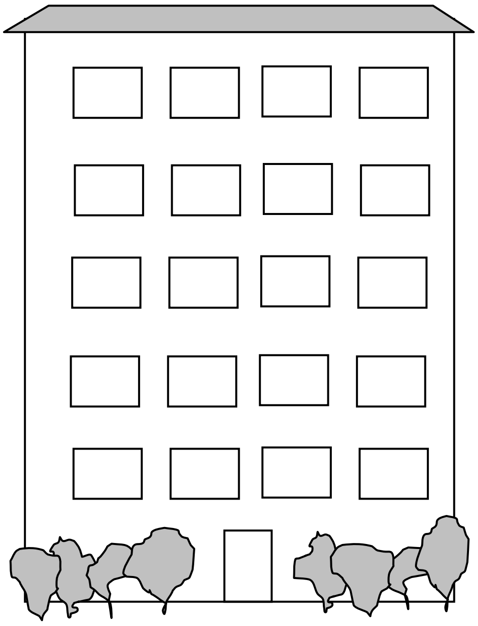
4 Réponse correcte (104 carrés gris) avec une explication claire et complète
3 Réponse correcte, avec une explication incomplète
2 Réponse correcte sans explication
ou réponse fausse due à une erreur de comptage ou de calcul
1 Début de raisonnement qui montre la compréhension du problème
0 Incompréhension du problème (par exemple, un nouveau tapis "double" de l'ensemble du tapis initial)

Niveaux: 3, 4, 5

Origine : fj et lg

5. FENÊTRES ECLAIRÉES (Cat 3, 4, 5)

C'est le soir. Marie est dans sa chambre et regarde la façade de l'immeuble d'en face.
Ce dessin montre ce que voit Marie : un immeuble de cinq étages avec beaucoup de fenêtres.
Certaines fenêtres sont éclairées et d'autres non.



Marie observe que :

- au premier étage, il y a trois fenêtres éclairées,
- il y a aussi trois fenêtres éclairées au quatrième étage,
- dans la colonne de gauche pour deux fenêtres qui se suivent, l'une est éclairée, l'autre non,
- dans la colonne de droite, il y a deux fenêtres éclairées,
- au cinquième étage, il y a une seule fenêtre éclairée,
- au troisième étage, toutes les fenêtres sont éclairées,
- en tout, il y a treize fenêtres éclairées.

Coloriez en jaune, dans le dessin de l'immeuble les fenêtres éclairées que voit Marie.

Dites comment vous avez fait pour reconnaître les fenêtres éclairées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstruction d'une répartition des cases d'une grille de 5 lignes et 4 colonnes en deux états (éclairé ou non), par une chaîne de déductions, à partir de sept informations sur les nombres de cases d'un des deux états par lignes ou par colonnes.

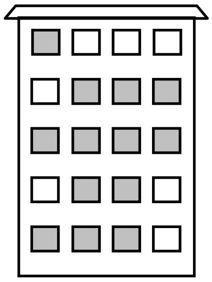
Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il n'y a qu'une seule des 7 informations données qui permet de déterminer l'état des fenêtres de manière univoque et que les autres offrent plusieurs possibilités.
- Commencer par l'information contenue dans le 6e point qui permet de colorier en jaune toutes les fenêtres du 3e étage. Puis, selon le 3e point, comprendre que la 1ere fenêtre à gauche du premier et du cinquième étage seront aussi éclairées. De là il est possible, en utilisant les différentes informations de suivre plusieurs chemins différents pour arriver à la solution.

  Par exemple, selon le 2e point (3 fenêtres éclairées au 4e) colorier en jaune toutes les fenêtres du 4e à l'exception de la 1ere qui est sombre.

  Puis selon le 4e point, déduire que les fenêtres non-jaunes de la 1ere colonne à droite restent sombres et selon le 1er point déduire qu'il faut colorier en jaune les 2 fenêtres centrales du 1er étage.

Finalement avec le 7e point (qui indique qu'il y a 13 fenêtres éclairées) on doit aussi colorier en jaune les fenêtres centrales du 2e étage.



Attribution des points

4 Coloriage correct et bien décrit (par exemple l'ordre dans lequel les fenêtres éclairées ont été découvertes : celle du troisième étage, puis celles de la colonne de gauche, …)

3 Coloriage correct avec explications insuffisantes ou manquantes

2 11 fenêtres sont coloriées correctement (sans tenir compte qu'il y a 13 fenêtres éclairées)

1 Début de coloriage correct (au moins celles du troisième étage et de la première colonne à gauche)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

6. LES BONBONS (Cat. 4, 5, 6)

Anne, Bea et Charles veulent se partager les bonbons contenus dans un sac.
Ils décident que chacun d'eux va lancer un dé et prendre dans le sac autant de bonbons qu'il y a de points sur le dé.
Après que chaque enfant a lancé le dé deux fois, il y a 10 bonbons en moins dans le sac.

C'est Charles qui a le plus de bonbons.

A ce moment-là combien de bonbons chaque enfant peut-il avoir ?

Indiquez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver, parmi les décompositions de 10 en somme de 3 nombres entiers supérieurs ou égaux à 2, celles où l'un des nombres est plus grand que les deux autres.

Analyse de la tâche

- Comprendre que la somme des bonbons gagnés par les trois enfants est de 10.
- Observer que chaque enfant a eu au moins deux bonbons parce que, à chaque lancer, chacun obtient au moins un point.
- Dans le cas où l'on part de la relation « C'est Charles qui a eu le plus de bonbons » on peut limiter la recherche en éliminant les répartitions où Charles n'aurait eu que 2 ou 3 bonbons, après plusieurs essais ou par déduction :

  avec 4 bonbons à Charles, il reste 6 bonbons pour les deux filles : 3 et 3

  avec 5 bonbons à Charles, il reste 5 bonbons pour les deux filles : 3 et 2 ou 2 et 3

  avec 6 bonbons à Charles, il reste 4 bonbons pour les deux filles : 2 et 2

  avec 7 bonbons à Charles, il reste 3 bonbons pour les deux filles, ce qui est impossible
- Dans le cas où l'on cherche l'inventaire de toutes les répartitions, on peut l'établir par essais successifs et éliminations des doublons ou, en considérant que chaque enfant ne peut pas avoir plus de 6 bonbons (les 2 autres en ayant chacun au moins 2), écrire les 15 décompositions de 10 en sommes de trois termes compris entre 2 et 6 :

Anne	**2**	**2**	2	2	2	**3**	**3**	3	3	4	4	4	5	5	6
Béa	**2**	**3**	4	5	6	**2**	**3**	4	5	2	3	4	2	3	2
Charles	**6**	**5**	4	3	2	**5**	**4**	3	2	4	3	2	3	2	2

  et choisir les quatre qui conviennent (en gras ci-dessus)

Attribution des points

4 Réponse correcte : les quatre possibilités (C 6, B 2, A 2 ; C 5, B 3, A 2 ; C 5, B 2, A 3 ; C 4, B 3, A 3) avec une procédure explicite

3 Les quatre possibilités sans explications

ou trois des quatre possibilité, mais avec des explications claires

2 Trois des quatre possibilités, sans explications

ou trois des quatre possibilités (un oubli) et une solution ne respectant pas les contraintes

ou deux des quatre possibilités avec explications

1 Une ou deux des quatre possibilités sans explication

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Parme

7. TOM ET LOU (Cat. 5, 6)

Tom joue avec des jetons rouges et des jetons bleus.
Il a 12 jetons rouges de plus que de jetons bleus.
Sa sœur Lou prend la moitié des jetons rouges et la moitié des jetons bleus.
Tom compte les jetons qui restent et en trouve 78.

Combien de jetons rouges et combien de jetons bleus Lou a-t-elle pris ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Trouver 2 nombres, dont la somme est égale à 78 et dont la différence des doubles est égale à 12.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème : le nombre de jetons pris par Lou et égal au nombre de jetons restants comptés par Tom, la différence des 2 nombres est égale à 12, la somme des moitiés des 2 nombres est égale à 78.
- Les stratégies suivantes sont plus rapides ou plus économiques si les élèves se rendent compte que le nombre de chaque sorte de jetons doit être pair (pour que Lou puisse en prendre la moitié)
- Stratégie par essais et ajustements de nombres respectant les contraintes énoncées successivement : essai (hypothèse) respectant les 12 jetons de différence, calcul de la moitié de chaque nombre (pris par Lou ou qui restent), addition des restes et vérification pour savoir si cette somme est 78.
- Stratégie par inventaires des cas, par exemple en commençant l'énumération à 2 pour les jetons bleus et donc à 14 (2 + 12) pour les jetons rouges et vérification de la 2e condition (cette organisation peut apparaître, mais sans doute pas sous forme de tableau, par exemple :

Jetons bleus	Jetons rouges	Moitié des bleus	Moitié des rouges	**Somme des moitiés**
2	14	1	7	**8**
4	16	2	8	**10**
6	18	3	9	12
…	…	…	…	**…**

  L'inventaire peut s'arrêter lorsque la somme 78 est atteinte en remarquant que la suite des sommes est croissante.
- Procéder de même, mais en partant des jetons enlevés (ou restants) et en considérant qu'il y a 6 jetons restants rouges de plus que de jetons restants bleus.
- Comprendre que dans chacune des deux moitiés de jetons, le nombre de jetons rouges dépasse de 6 le nombre de jetons bleus, puis qu'en soustrayant 6 de 78 on obtient le double des jetons bleus. Par conséquent le calcul (78-6): 2 = **36** donne le nombre de jetons bleus et 36 + 6 = **42** le nombre de jetons rouges.
- Raisonner en partant du nombre initial de jetons (156 = 78 × 2). En soustrayant les 12 jetons rouges de plus, on obtient le double du nombre de jetons bleus (144 = 156-12). En déduire le nombre de jetons bleus (72 = 144: 2) et celui des jetons rouges (84 = 72 + 12), puis le nombre de jetons pris par Lou (la moitié des nombres précédents), ce raisonnement peut aussi conduire à la suite de calculs : (156 – 12) : 2 = 72, 72 + 12 = 84, 72 : 2 = **36,** 84 : 2 = **42**

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (36 bleus, 42 rouges) avec explications claires et détaillées

3 Une des deux réponses correctes avec explications claires et détaillées et l'autre absente ou erronée (suite à une erreur de calcul)
ou les deux réponses correctes avec explications absentes ou incomplètes

2 Procédure correcte, mais réponses erronées dues à une erreur de calcul
ou réponse respectant les quantités totales de jetons (72 bleus et 84 rouges)

1 Début de recherche cohérente
ou réponses du type « 45 rouges et 33 bleus » (total = 78 et écart = 12)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Luxembourg

8. LE VERGER DE TANTE MARIE (Cat. 5, 6, 7)

Tante Marie a planté 21 arbres fruitiers dans son verger : des pommiers, des pruniers, des abricotiers et des cerisiers. Il y a au moins 2 arbres de chaque sorte.
Comme elle aime beaucoup les prunes, le nombre de pruniers est le plus grand. C'est même le double du nombre de pommiers.
Le nombre des abricotiers est le double du nombre des cerisiers.

Combien peut-il y avoir de pruniers dans le verger de tante Marie ?

Trouvez toutes les réponses possibles. Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Arithmétique : décomposition de 21 en une somme de quatre termes supérieurs à 1, en deux couples dont un terme est le double de l'autre

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a quatre nombres à trouver supérieurs ou égaux à 2, dont la somme est 21, formant deux couples de nombres dont l'un des deux termes est le double de l'autre.
- Comprendre que toutes les fois que l'on fait un essai avec un couple de nombres dont un terme est le double de l'autre on peut soustraire la somme de ces deux nombres de 21 et tenter de décomposer la différence obtenue en deux nombres dont l'un est double de l'autre.

  Par essais et vérifications, il n'y a finalement que 4 couples à envisager après avoir éliminé (2 ; 1) et les couples dont la somme est supérieure ou égale à 21 comme (14 ; 7), … :

  (4 ; 2) donne une différence de 15 et un nouveau couple (10 ; 5)

  (6 ; 3), différence de 12, nouveau couple (8 ; 4)

  (8 ; 4) différence de 9, nouveau couple (6 ; 3)

  (10 ; 5), différence de 6, nouveau couple (4 ; 2)

  (12 ; 6) donne une différence de 3 et un nouveau couple (2 ; 1) à éliminer
- Tenir compte que les pruniers sont les arbres les plus nombreux pour arriver à la conclusion qu'il y a deux solutions pour les pruniers et les pommiers : (10 ; 5) et (8 ; 4) conduisant respectivement aux nombres d'abricotiers et de cerisiers : (4 ; 2) et (6 ; 3).
- Donner enfin les deux solutions : 10 pruniers et 8 pruniers.

Ou, puisque le nombre de pruniers est le double du nombre de pommiers, le total de ces types d'arbres est un multiple de trois. Il en est de même pour le nombre d'abricotiers et de cerisiers. La somme de ces deux multiples de 3 doit être égale à 21. Les multiples de 3 inférieurs à 21 sont : 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 et 18. Par conséquent, les paires de nombres à considérer sont 3 (1 + 2) et 18 (12 + 6) ; 6 (2 + 4) et 15 (10 + 5) ; 9 (6 + 3) et 12 (4 + 8). La première paire n'est pas acceptable car il doit y avoir au moins deux arbres de chaque type.

Attribution des points

4 Réponse correcte avec les deux possibilités (10 ou 8 pruniers), avec explications claires des étapes de la recherche (détail des couples, choix, …) ou schéma avec vérification des contraintes ou autre forme de vérification complète

3 Réponse correcte avec les deux possibilités, mais la procédure n'est pas donnée ou pas clairement explicitée ou avec une vérification partielle
ou une seule possibilité bien expliquée (mais sans vérification)

2 Les deux possibilités sans aucune explication ni vérification
ou une possibilité avec seulement une vérification

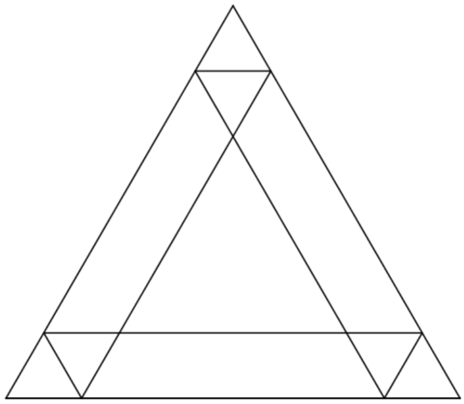
1 une possibilité sans explication ni vérification
ou début de recherche compatible (réponses qui respectent au moins deux conditions)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Val d'Aoste

9. QUE DE PARALLELOGRAMMES (Cat 5, 6, 7)



Tous les triangles que l'on peut voir dans cette figure sont équilatéraux.

Combien peut-on voir, en tout, de parallélogrammes dans cette figure ?

Décrivez ou indiquez les parallélogrammes trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconnaissance et comptage de parallélogrammes dans une figure

Analyse de la tâche

- Savoir reconnaître des parallélogrammes dans la figure en tenant compte du caractère régulier de la figure pour identifier les parallélogrammes identiques ;
- S'organiser pour ne pas oublier de parallélogrammes, ne pas comptabiliser deux fois le même.
- Exploiter le fait que dans un parallélogramme les côtés opposés sont parallèles.

Choisir deux paires de côtés parallèles afin de former un quadrilatère qui sera forcément un parallélogramme.

- Considérer qu'un losange est un parallélogramme

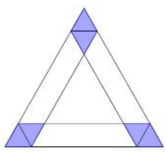
Il y a évidemment de nombreuses façons d'organiser l'inventaire, avec de nombreux risques de confusions ou d'oublis :

- nommer tous les « sommets » de la figure (ou les segments) et désigner les parallélogrammes par ces sommets (ou ces segments), ce qui aboutit à une notation lourde et longue, difficile à contrôler,
- utiliser des couleurs, ce qui ne permet plus de distinguer clairement les différentes figures,
- travailler par types de parallélogrammes d'une autre manière que ci-dessus, en tenant compte par exemple des transformations du triangle équilatéral …

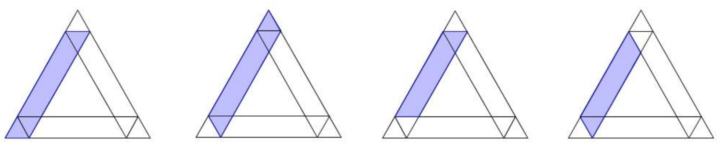
La tâche principale est précisément de choisir la représentation la plus efficace.

On aboutit à :

- 3 parallélogrammes qui sont aussi des losanges (1 famille de parallélogrammes)



- 12 parallélogrammes (qui ne sont pas des losanges), à savoir
  3 familles de 4 parallélogrammes, l'une à gauche comme sur la figure ci-dessous, une autre à droite et une en bas.



Il y a en tout 3 + 12 = 15 parallélogrammes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (15) avec descriptions complètes (dessin ou autres désignations)

3 Réponse correcte (15) avec description peu « lisibles » (par exemple, par des couleurs sur un même dessin ou autres descriptions qui ne désignent pas tous les parallélogrammes)

2 Réponse (15) sans aucune description
ou réponse (13 ou 14) avec descriptions (un ou deux oublis)
ou réponse erronée (12) avec oubli des 3 parallélogrammes losanges, avec descriptions
ou plus de 15, avec présence d'autres figures non correctes (exemple : trapèze non parallélogrammes)

1 de 4 à 11 parallélogrammes différents

0 Incompréhension du problème ou moins de 4 parallélogrammes.

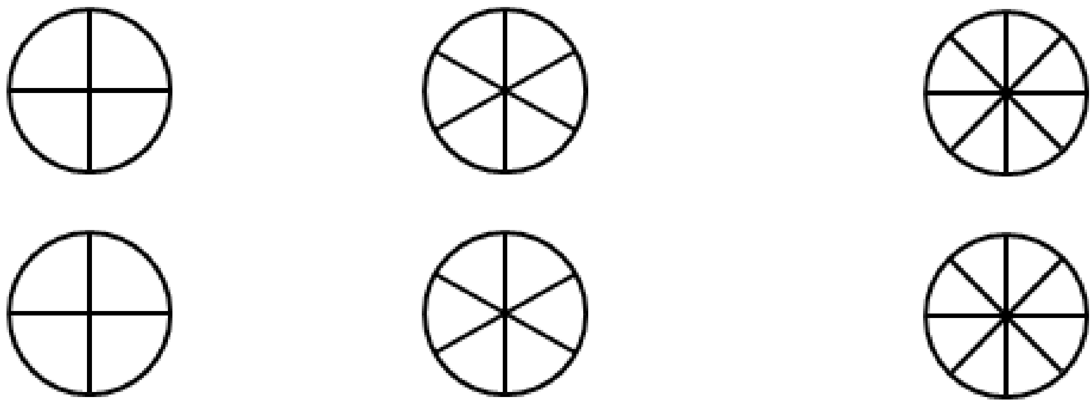
Niveaux : 5**,** 6, 7

Origine : Luxembourg

10. LES PARTS DE TARTES (Cat. 6, 7, 8)

Huit amis ont commandé six tartes pour le goûter. Le pâtissier a livré deux tartes aux fraises, deux tartes aux pommes et deux tartes aux kiwis. Toutes les tartes ont la même taille, mais les tartes aux fraises sont déjà coupées en quatre, les tartes aux pommes sont coupées en six et les tartes aux kiwis sont coupées en huit.

Ils se mettent d'accord pour que chacun mange la même quantité de tarte, sans avoir à couper d'autres parts. Chacun veut aussi avoir deux sortes de tartes. Comme les amis sont très gourmands, ils vont tout manger.



tartes aux fraises tartes aux pommes tartes aux kiwis

Comment les huit amis peuvent-ils se répartir les parts de tartes ?

Donnez toutes les possibilités que vous avez obtenues et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les manières de répartir 8 quarts, 12 sixièmes et 16 huitièmes en 8 parts équivalentes, chacune constituée de deux types de fractions.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut répartir les tartes en 8 portions égales en prenant, pour chaque portion, des parts dans deux tartes.
- Raisonnement utilisant le calcul sur les fractions :
- Les 6 tartes étant entièrement consommées, chacun aura mangé 6/8 de tarte.
- Il faut donc obtenir 6/8 en additionnant soit des quarts et des sixièmes, soit des quarts et des huitièmes, soit des sixièmes et des huitièmes.
- Le raisonnement le plus simple consiste à chercher à compléter une ou plusieurs parts de chaque tarte pour obtenir des portions de 6/8 (ou de 3/4) de tarte.
  - Compléter 1/4 (égal à 2/8) par 4/8 (ou 1/2). On peut avoir alors : 1/4 + 3 × 1/6 ou 1/4 + 4 × 1/8.
  - Compléter 2 × 1/4 (égal à 1/2 ou 4/8) par 2 × 1/8. Donc 2 × 1/4 + 2 × 1/8.
  - Compléter 1/6 ou 2/6 par des huitièmes pour avoir 6/8 n'est pas possible.
  - Compléter 3/6 (égal à 1/2) par des huitièmes est possible : 3 x 1/6 + 2 x 1/8.
- On peut donc obtenir 6/8 de tarte de quatre manières différentes en tenant compte que chacun ne prend que deux sortes de tartes :

	Tarte aux fraises	Tarte aux pommes	Tarte aux kiwis
Portion A	1/4	1/6 + 1/6 + 1/6	
Portion B	1/4		1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8
Portion C	1/4 + 1/4		1/8 + 1/8
Portion D		1/6 + 1/6 + 1/6	1/8 + 1/8

- Les 5 répartitions possibles entre les 8 enfants résultent des combinaisons de ces 4 portions :

  répartition 1 : 4 personnes avec A ; 4 personnes avec B

  répartition 2 : 3 personnes avec A ; 3 personnes avec B ; 1 personne avec C ; 1 personne avec D répartition 3 : 2 personnes avec C ; 2 personnes avec B ; 2 personnes avec A ; 2 personnes avec D

répartition 4 : 1 personne avec A ; 1 personne avec B ; 3 personnes avec C ; 3 personnes avec D

répartition 5 : 4 personnes avec C ; 4 personnes avec D

Ou : procéder par essais plus ou moins organisés, à partir d'un découpage de toutes les parts de tartes. Cette stratégie peut permettre de trouver une ou deux répartitions, mais sans doute pas les cinq possibles.

Attribution des points

4 Au moins trois répartitions exactes avec explications correcte et aucune répartition fausse

3 Au moins trois répartitions exactes sans répartition fausse, sans explications ou avec explications partielles
ou deux répartitions exactes avec explications et sans répartition fausse

2 Au moins deux répartitions exactes (sans explications) et au plus une solution fausse
ou au moins trois répartitions exactes (sans explications) et au plus deux répartitions fausses

1 Une seule répartition exacte avec éventuellement d'autres solutions fausses

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Bourg en Bresse

11. PAS SI SIMPLE… (Cat. 6, 7, 8)

Le professeur de mathématiques propose une devinette à la classe :
En utilisant trois fois le nombre 5 et une fois le nombre 1 vous devez obtenir 24 par des additions, soustractions, multiplications ou divisions.

Par exemple :

$(5 + 1) \times (5 - 1) = 24$ ne convient pas car il n'y a que deux nombres 5 et deux nombres 1,
$(5 \times 5) - 1^5 = 24$ ne convient pas non plus car 1^5 n'est pas une des opérations autorisées.
Mais je peux vous assurer qu'il y a une solution.

Quelle est la solution à la devinette proposée par le professeur ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Obtenir 24 à partir des quatre nombres 5, 5, 5 et 1 par des opérations arithmétiques : addition, soustraction, multiplication et division.

Analyse de la tâche

- Effectuer des essais en utilisant éventuellement une calculatrice et se convaincre qu'il n'y a pas de solution en restant dans l'ensemble des entiers naturels.
- Essayer en partant de 24 d'ajouter, de soustraire ou de diviser par 5 et raisonner sur les nombres obtenus en utilisant encore deux fois le nombre 5 et une fois le nombre 1.

Ou : prendre conscience que la seule manière d'obtenir un nombre décimal avec une seule opération à partir des nombres 5 et 1 est de diviser 1 par 5, ce qui donne 0,2.

Continuer en essayant d'obtenir 24 à partir de 0,2 en utilisant deux fois le nombre 5. Trouver que la seule façon d'y parvenir est d'effectuer $(5 - 0{,}2) \times 5 = 4{,}8 \times 5 = 24$

Attribution des points

4 L'expression correcte, $(5 - 1/5) \times 5$ avec explications sur la procédure de recherche
3 L'expression correcte sans explications
2 La bonne succession d'opérations mais avec une expression incorrecte (par exemple $5 - 1/5 \times 5$)
1 Une explication convaincante du fait qu'il n'y a pas de solution avec des entiers
ou une présentation d'éléments montrant une compréhension du problème
0 Incompréhension du problème ou essais incorrects (ne respectant pas les contraintes)

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Bourg en Bresse

12. QUITTE OU TRIPLE (Cat. 6, 7, 8, 9)

Pour sa fête d'anniversaire, Louise a organisé un jeu de questions et réponses, « Quitte ou triple » où, à chaque partie, les joueurs misent un certain nombre de jetons et répondent à une question.

Les règles du jeu sont les suivantes :

- Si le joueur donne une réponse juste à la question, il gagne et reçoit le triple du nombre de jetons qu'il a misés.
- Si le joueur donne une réponse fausse, il perd tous les jetons qu'il a misés.

Paul décide de jouer ainsi à « Quitte ou triple » :

Il misera tous ses jetons et, s'il gagne, il en donnera à chaque fois 12 à son petit frère Pierre pour constituer une réserve, puis il jouera à nouveau avec tous les jetons qui lui restent.

Paul joue et gagne ses trois premières parties. Après sa troisième partie, il a donné en tout 36 jetons à Pierre et il lui en reste 87 pour la quatrième partie.

Combien de jetons Paul avait-il avant de commencer à jouer à « Quitte ou triple » ?

Expliquez votre raisonnement

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le nombre qui, transformé trois fois de suite par la fonction « multiplier par 3 puis soustraire 12 », donne 87.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a une différence entre le nombre de jetons mis en jeu et ceux qui ont été gagnés.
- Démarche arithmétique :

  Se rendre compte qu'avant de jouer sa deuxième et troisième partie, Paul a 12 jetons de moins que ceux qu'il a gagnés à la partie précédente. Il est alors préférable de raisonner à partir du nombre final de jetons (87).

  En procédant par un raisonnement à rebours, on peut en déduire le gain de Paul à la troisième partie. Ce gain s'élève à 87 + 12 = 99 jetons. Il avait donc 99 : 3 = 33 jetons avant la troisième partie.

  De cela, on peut déduire le nombre de jetons que Paul avait après la deuxième partie, à savoir 33 + 12 = 45.

  Donc, avant de jouer sa deuxième partie, il avait 45 : 3 = 15 jetons.

  Vu qu'il a aussi donné 12 jetons à son frère après la première partie, il devait en avoir 15 + 12 = 27 à l'issue de celle-ci. C'est ainsi qu'on peut affirmer qu'il avait 27 : 3 = 9 jetons avant de commencer la première partie.
- Démarche algébrique:

  Soit x le nombre de jetons que Paul avait avant de jouer la première partie.

  Après la première partie, après déduction des jetons donnés à son frère, Paul avait $3x - 12$ jetons.

  Après la deuxième partie, après déduction des jetons donnés à son frère, Paul avait $3(3x - 12) - 12$ jetons.

  Après la troisième partie, après déduction des jetons donnés à son frère, Paul a $3[3(3x - 12) - 12] - 12$ jetons.

  Il faut donc résoudre l'équation : $3[3(3x - 12) - 12] - 12 = 87$. On trouve $x = 9$.
- Par tâtonnements :

  Émettre une hypothèse sur le nombre initial de jetons que possédait Paul.

Ou : le nombre de jetons gagnés après la première partie est à choisir parmi les multiples de 3 supérieurs à 12, puisqu'à ce nombre il faudra ensuite soustraire 12, ce qui nous laisse 15, 18, 21, 27, 30, … comme possibilités. Le nombre 27 donne la bonne réponse.

Attributions des points

4 Réponse correcte (9 jetons) avec explications claires et calculs détaillés

3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes ou bien seulement une vérification

2 Réponse correcte sans explication
ou réponse fausse due à une erreur de calcul, mais avec explication

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9

Origine : Lodi