



Titres	origine	catégories	tâche mathématique
<b>1. Une course matinale</b>	FC	3 4	Durée d'un parcours de 10 tours de piste au rythme de 4 tours en $\frac{1}{2}$ h
<b>2. La grille de Max (I)</b>	LY	3 4	Inscrire dans une grille carrée $4 \times 4$ trois rectangles $2 \times 1$
<b>3. Des tours toujours plus hautes</b>	RZ	3 4	Progression géométrique de raison 2
<b>4. Puce savante</b>	lg-fj	3 4 5	Nombres entiers obtenus dans une suite de deux opérations (addition et soustraction)
<b>5. Les billes d'Arthur</b>	SI	3 4 5 6	Trouver trois nombres entiers vérifiant certaines relations
<b>6. La tarte aux fruits</b>	RMT	4 5 6 7	Déterminer le nombre de secteurs égaux partageant un disque
<b>7. Corbeilles de fruits (I)</b>	SI	5 6 7	Additionner les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{3}{5}$ de 30
<b>8. La grille de Max (II)</b>	LY	5 6 7	Inscrire six rectangles de dimensions variées dans une grille carrée $6 \times 6$
<b>9. L'équipe de volley</b>	PR	5 6 7 8	Déterminer 6 diviseurs de 36 vérifiant certaines conditions
<b>10. Concours de pêche</b>	SI	5 6 7 8	Recherche de trois nombres entiers vérifiant certaines conditions
<b>11. La porcherie</b>	FC	6 7 8	Déterminer à l'intérieur d'une ligne fermée l'ensemble des points situés à une distance de 7 points donnés supérieure à une distance donnée
<b>12. Escaliers</b>	SI	7 8 9	Rang d'une figure dans une suite régulière de figures planes
<b>13. Corbeilles de fruits (II)</b>	SI	8 9 10	Recherche d'un nombre dont la somme de la moitié et du tiers est égale à 60.
<b>14. La pâte à tartiner</b>	FC	8 9 10	Déterminer le choix le plus avantageux parmi trois offres pour l'achat d'un produit
<b>15. Un rectangle en morceaux</b>	AO	8 9 10	Trouver les dimensions d'un rectangle dans lequel on a disposé en 6 figures identiques en forme de L
<b>16. Un dimanche à bicyclette</b>	PR	9 10	Calculer la longueur et le temps d'un parcours sur une piste cyclable
<b>17. Les quatre cercles</b>	Gr 0 <sup>0</sup>	9 10	Différence des rayons de couples de cercles concentriques dont la différence des longueurs est constante
<b>18. Drôles de triangles</b>	LUX	9 10	Existence ou non d'un triangle équilatéral, dont le périmètre et l'aire sont mesurés par le même nombre entier
<b>19. Carrelages en or</b>	PR	10	Minimiser l'aire de deux figures planes inscrites dans une troisième

## 1. UNE COURSE MATINALE (Cat. 3, 4)

Tous les matins, Jeanne s'entraîne à la course sur la piste d'athlétisme de sa région.

En une demi-heure, elle fait toujours 4 tours de piste.

Demain, Jeanne veut parcourir 10 tours de piste en courant toujours au même rythme.

**Combien de temps mettra-t-elle ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.**

---

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver le temps de parcours de 10 tours de piste d'athlétisme au rythme de 4 tours de piste en une demi-heure.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que « au même rythme » signifie qu'en une demi-heure, Jeanne fait toujours 4 tours de piste.
- En déduire que 2 tours de piste sont parcourus en un quart d'heure (moitié d'une demi-heure).
- Remarquer que  $10 \text{ tours} = 4 \text{ tours} + 4 \text{ tours} + 2 \text{ tours}$ , et par conséquent que le temps nécessaire pour les parcourir est égal à  $\frac{1}{2} \text{ h} + \frac{1}{2} \text{ h} + \frac{1}{4} \text{ h}$ , soit une heure et un quart d'heure (1 h 15 min ou 75 min).

Ou bien,

- effectuer la décomposition  $10 = 2 \times 4 + 2$  et considérer que le temps pour parcourir 10 tours de piste se décompose de la même manière, c'est-à-dire 2 fois une demi-heure plus la moitié d'une demi-heure, soit 1 h et un quart d'heure.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (une heure et un quart d'heure, ou 1 h 15 min ou encore 75 min) avec des explications
- 3 Réponse correcte sans explication
- 2 Réponse erronée, mais une décomposition correcte des 10 tours liée à un raisonnement sur le temps
- 1 Début de raisonnement
- 0 Incompréhension du problème

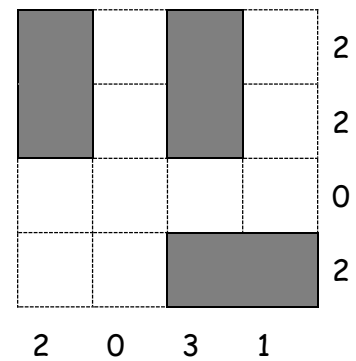
**Niveaux :** 3, 4

**Origine :** Franche-Comté

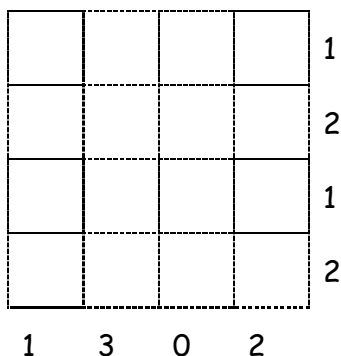
## 2. LA GRILLE DE MAX (I) (Cat. 3, 4)

Dans la grille ici à droite, Max a rangé trois rectangles en respectant ces consignes :

- chaque rectangle occupe exactement deux cases de la grille,
- les rectangles ne se touchent pas entre eux,
- sur chaque ligne, le nombre de cases occupées par des rectangles est écrit à droite,
- sur chaque colonne, le nombre de cases occupées par des rectangles est écrit en bas.



Max a dessiné une nouvelle grille avec d'autres nombres à droite et en bas :



**Dessinez les trois rectangles dans cette nouvelle grille de sorte que toutes les consignes soient respectées.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

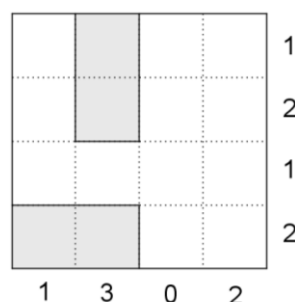
Placer, sur une grille carrée  $4 \times 4$ , trois rectangles  $2 \times 1$ , respectant des conditions relatives à leur disposition et au nombre de cases qu'ils occupent sur chaque ligne et chaque colonne.

#### Analyse de la tâche

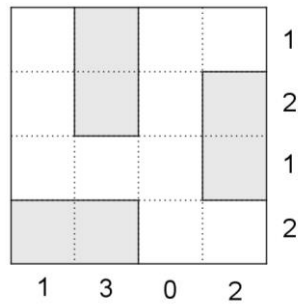
- Comprendre les données du problème : la forme de la grille, le nombre et les dimensions des rectangles.
- Comprendre qu'il faut placer dans le carré blanc les trois rectangles horizontalement ou verticalement sans les superposer en respectant la contrainte de n'avoir pas de points communs.
- Comprendre la signification des nombres écrits à la fin de chaque ligne et de chaque colonne : nombre des cases occupées dans chaque ligne et dans chaque colonne.
- Découper ou dessiner trois rectangles et les placer dans la grille de façon à ce qu'ils vérifient les conditions de l'énoncé.

Ou bien

- Procéder par essais organisés :
- dans la colonne "0" il n'y a pas de case occupée ; dans la colonne "3" il faut qu'il y ait un rectangle en vertical et un en horizontal ; le rectangle horizontal doit être sur la deuxième ou sur la quatrième ligne ; arriver par éliminations à placer deux rectangles :



- Procéder par élimination pour placer le troisième rectangle dans la quatrième colonne. On arrive à l'unique solution :



**Attribution des points**

- 4 La grille correctement remplie avec les 3 rectangles
- 3 Réponse erronée (avec deux rectangles qui se touchent), mais respectant toutes les contraintes numériques
- 2 Réponse erronée due au non respect seulement de deux consignes numériques
- 1 Début de recherche
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 3, 4

**Origine :** Lyon

### 3. DES TOURS TOUJOURS PLUS HAUTES (Cat. 3, 4)

Luc a beaucoup de cubes. Il veut construire 6 tours en plaçant les cubes les uns sur les autres.

Pour construire la première tour, Luc utilise un seul cube.

Pour construire la deuxième tour, il utilise deux cubes.

Pour construire la troisième tour, il utilise le double du nombre de cubes qu'il a utilisés pour construire la deuxième.

Et il continue ainsi en doublant à chaque fois le nombre de cubes utilisés pour la tour précédente.

**Combien de cubes Luc devra-t-il utiliser pour construire ses six tours ?**

**Montrez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.**

---

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Dans un contexte de construction de tours, calculer la somme des six premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 et dont le premier terme est égal à 1.

##### Analyse de la tâche

- Savoir ce qu'est le double d'un nombre et comprendre que pour chaque nouvelle tour construite, on utilise le double du nombre de cubes utilisés pour la précédente.

Procédure s'appuyant sur un dessin :

- Dessiner ou schématiser les 6 tours, dénombrer ou calculer les cubes utilisés pour chaque tour et en faire la somme ou dénombrer tous les cubes un à un et obtenir 63.

Procédure numérique :

- Calculer le nombre de cubes utilisés pour chaque tour et en faire la somme :  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ .

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (63) avec des explications complètes (suite des calculs effectués avec mention du nombre de cubes utilisés pour chaque tour ou dessin ou schéma des tours avec explication de la façon dont le nombre total de cubes a été déterminé : par exemple, on a compté tous les cubes ou écriture du nombre de cubes contenus dans chaque tour et de la somme de ces nombres)
- 3 Réponse correcte avec des explications incomplètes (dessin ou schéma imprécis)
- 2 Détermination exacte du nombre de cubes utilisés pour chaque tour avec des explications montrant comment on a trouvé, mais la somme non effectuée ou la somme est donnée avec une erreur de calcul
- 1 Début de raisonnement correct : dessin exact des 4 premières tours au moins ou écriture du nombre de cubes utilisés pour au moins les 4 premières tours
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Rozzano

#### 4. PUCE SAVANTE (Cat. 3, 4, 5)

Une puce savante se déplace régulièrement sur son ruban de nombres.

La figure ci-dessous représente le début du ruban de nombres de la puce savante :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

La puce part de la case 0, fait un saut en avant de 9 cases (elle se retrouve donc sur la case 9) puis un saut en arrière de 5 cases (elle se trouve sur la case 4), puis elle fait à nouveau un saut en avant de 9 cases, puis un saut en arrière de 5 cases, et ainsi de suite.

Elle s'arrête de sauter lorsqu'elle a atteint ou dépassé la case 100.

**Combien de sauts la puce a-t-elle fait pour atteindre ou dépasser la case 100 ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Trouver le nombre de séquences de deux opérations, une addition de 9 suivie d'une soustraction de 5, permettant d'atteindre 101 en partant de 0.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de déplacement de la puce : un saut de 9 cases à partir de 0 lui permet d'atteindre la case 9, puis un saut de 5 cases en arrière la fait revenir à la case 4, puis au saut suivant la puce atteint la case 13, ...
- Au moyen de manipulations et déplacements effectifs, dessiner le ruban jusqu'à 100 et y suivre les déplacements de la puce ou les marquer et compter les sauts.

Ou, par l'écriture de tous les nombres des cases successives sur lesquelles la puce est passée : 0 ; 9 ; 4 ; 13 ; 8 ; 17 ; 12 ; 21 ; 16 ; 25 ; ... 80 ; 89 ; 84 ; 93 ; 88 ; 97 ; 92 ; 101 et par comptage, constater que 101 correspond au 24<sup>e</sup> saut de 9 en avant ou au 47<sup>e</sup> saut au total (23 sauts en arrière et 24 en avant).

Ou : par déductions et/ou des opérations arithmétiques à partir des nombres des premières cases, observer que les nombres de rang impair de la suite précédente 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; ... sont en progression de raison 4 à partir de 9 ou que les nombres de rang pair : 0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; ... sont les multiples de 4. On peut en déduire par exemple que les nombres 80, 84, 88, 92, 96, 100 seront les 20<sup>e</sup>, 21<sup>e</sup>, 22<sup>e</sup>, 23<sup>e</sup>, 24<sup>e</sup> et 25<sup>e</sup> multiples de 4, et que si on leur ajoute 9, on arrivera pour la première fois à 100 et plus (on arrive à 101) dès 92, qui est le 23<sup>e</sup> multiple de 4. En déduire que le saut suivant sera le 24<sup>e</sup> saut, de 9 en avant et le 47<sup>e</sup> saut au total (23 + 24 = 47).

##### Attribution des points

- 4 La réponse correcte : 47 sauts avec le détail de la procédure (dessin complet du ruban avec des marques de passages ou avec la liste des nombres des passages jusqu'à 101, ou opérations effectuées et comptages)
- 3 La réponse correcte : 47 sauts avec une procédure non détaillée ou incomplète (« on a compté les sauts sur la bande » ou début de liste des nombres de passages,...)
  - ou procédure détaillée, mais avec une erreur dans le comptage conduisant à 46 ou 48 sauts
- 2 La réponse correcte : 47 sauts sans explication,
  - ou 24 sauts de 9 en avant, avec des détails
  - ou erreur « 50 sauts » sauts en mentionnant explicitement que, après avoir atteint 101 au 47<sup>e</sup> saut, il faut encore passer par 96, 105 pour arriver exactement sur 100 au 50<sup>e</sup> saut (ayant seulement confondu « atteindre » la case 100 avec « atteindre ou dépasser »)
- 1 Erreur : 50 sauts, due à une simple division de 100 par 4 pour déterminer le nombre de périodes, sans tenir compte du « décalage » des sauts vers l'avant et sans détailler le parcours
  - ou erreur « 25 sauts » en avant en donnant les détails des sauts qui arrivent exactement sur la case 100.
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 3, 4, 5

**Origine :** lg et fj

## 5. LES BILLES D'ARTHUR (Cat. 3, 4, 5, 6)

Arthur a l'habitude de ranger ses billes dans des boîtes de deux types différents :

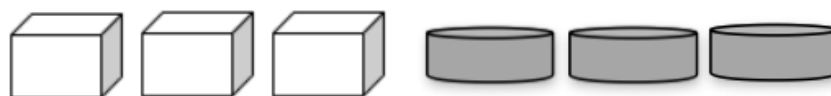


Il met toujours le même nombre de billes dans chaque boîte blanche et le même nombre de billes dans chaque boîte noire.

Lundi, Arthur montre ces boîtes blanches à Philippe et lui dit : « Dans ces boîtes, il y a en tout 42 billes ».



Mardi, Arthur montre ces autres boîtes à Philippe et lui dit : « Dans ces boîtes, il y a en tout 30 billes ».



Mercredi, Arthur montre encore d'autres boîtes à Philippe et lui demande : "Dans ces boîtes, combien y a-t-il de billes au total ?".



**Combien y a-t-il de billes en tout dans les boîtes d'Arthur mercredi ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver le nombre de billes contenues dans 5 boîtes cubiques et dans une boîte cylindrique, en sachant qu'il y en a 42 dans 7 boîtes cubiques et 30 dans 3 boîtes cubiques et 3 boîtes cylindriques (les boîtes d'un même type contiennent toutes le même nombre de billes).

#### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a 2 types de quantités qui correspondent aux 2 types de boîtes.
- Comprendre qu'il faut déterminer le nombre de billes pour chaque type de boîtes.

Utiliser une stratégie déductive :

- Dédire de l'information du lundi que chaque boîte cubique blanche contient 6 billes (a).
- Dédire de l'information du mardi et de (a) que chaque boîte noire contient 4 billes (b).
- Dédire de (a) et (b) le nombre de billes du mercredi (34 billes).

Où : utiliser une stratégie par essais et ajustements, notamment pour trouver le nombre de billes dans chaque boîte noire.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (34 billes) avec des explications complètes sur la procédure (détails des calculs ou des explications qui fassent comprendre quels calculs ont été faits)
- 3 Réponse correcte avec des explications incomplètes (par exemple, une étape non explicitée)
- 2 Raisonnement correct mais réponse erronée due à une erreur de calcul  
ou réponse correcte sans explication
- 1 Début de recherche cohérente (calcul du nombre de billes contenues dans une boîte blanche)
- 0 Incompréhension du problème



**Niveaux :** 3, 4, 5, 6

**Origine :** Groupe Calcul et Proportionnalité (adaptation du problème *Le robot d'Arthur*, 20.II.2)

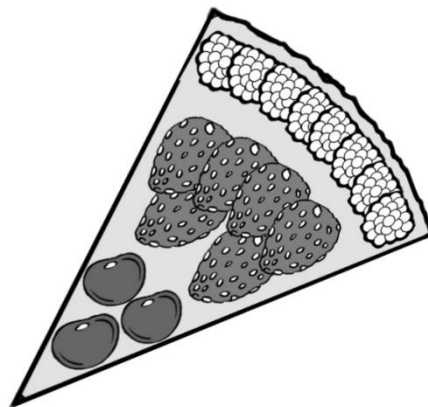
## 6. LA TARTE AUX FRUITS (Cat. 4, 5, 6, 7)

Pauline a invité ses amis pour fêter son anniversaire.

Son papa a confectionné une excellente tarte aux fruits et, pour contenter tout le monde, il l'a découpée en parts de mêmes dimensions et avec le même nombre de fruits sur chaque part de tarte.

La fête est finie, Pauline constate qu'il reste une seule part de tarte. Sur cette part elle compte 17 fruits et elle s'exclame: « *Tu as vraiment utilisé beaucoup de fruits pour faire la tarte, papa !* »

Ce dessin représente la part de tarte posée sur la table, vue du dessus :



**Combien de fruits le papa de Pauline a-t-il utilisés en tout pour décorer la tarte entière ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer le nombre de secteurs circulaires superposables en lesquels un disque a été partagé, à partir du dessin d'un des secteurs (dont l'angle mesure  $40^\circ$ ), pour trouver le nombre total d'objets disposés sur le disque, sachant que sur chaque secteur il y en a 17.

#### Analyse de la tâche

- Se représenter la tarte et comprendre qu'elle a été partagée en parts égales, de la même forme, de mêmes dimensions, avec le même nombre de fruits. Comprendre que les parts étant l'une à côté de l'autre, deux parts voisines ont un « côté » en commun.
- Comprendre que pour trouver le nombre total de fruits utilisés, il faut reconstituer la tarte entière, de manière à connaître le nombre de parts en lesquelles la tarte a été découpée.

Pour reconstruire la tarte, on peut procéder de différentes manières.

- Découper une part égale à celle qui est dessinée (à partir d'une autre copie de l'énoncé ou en utilisant une feuille de papier calque), la poser à côté de la part donnée, en marquer le contour et continuer de même à reporter cette part sur le dessin de proche en proche, jusqu'à compléter toute la tarte. Compter le nombre des parts ainsi dessinées (9).

Ou bien, à partir du dessin d'une part, dessiner une autre part égale en pliant la feuille le long d'un côté de la première part et en traçant l'autre côté par transparence et continuer ainsi de suite.

Ou bien, tracer un cercle ayant pour centre la « pointe » de la part de tarte et pour rayon le « côté » de cette part, reporter l'arc ou la corde ou l'angle au centre, compter le nombre d'arcs, de cordes ou de secteurs angulaires.

Ou bien, mesurer au rapporteur l'angle de la part de tarte ( $40^\circ$ ) et déterminer le nombre de parts en calculant  $360 : 40 = 9$ .

Il est aussi possible de dessiner les parts de tarte « à l'oeil », mais cette procédure a peu de chances de donner le nombre exact de parts.

- Multiplier le nombre de fruits d'une part par le nombre de parts :  $17 \times 9 = 153$ .

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (153 fruits) avec des explications claires du raisonnement suivi pour déterminer le nombre de parts (dessin ou calcul), avec le comptage ou le calcul du nombre de fruits
- 3 Réponse erronée pour le nombre de fruits due à une erreur de calcul, mais détermination exacte du nombre de parts avec des explications claires  
ou bien réponse qui sépare les nombres des fruits (27 cerises, 54 fraises et 72 framboises), mais détermination correcte du nombre de parts avec des explications claires
- 2 Réponse correcte avec seulement le calcul du nombre de fruits  
ou détermination correcte du nombre de parts avec des explications, mais sans le nombre de fruits  
ou réponse « 136 fruits » ou « 170 fruits » correspondant respectivement à 8 ou à 10 parts, suite à un dessin imprécis
- 1 Réponse : « 136 fruits » ou « 170 fruits » sans dessin ni explication  
ou réponse : « 9 parts » mais sans conclusion  
ou début d'un dessin des parts manquantes par une des procédures indiquées, autre que « à vue », et qui montre la compréhension du problème
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 4, 5, 6, 7

**Origine :** Bourg-en-Bresse (cf. aussi 09.I.06, *Tarte Tatin*)

## 7. CORBEILLES DE FRUITS (I) (CAT. 5, 6, 7)

Inès a récolté dans son verger 60 fruits : des pommes et des poires. Pour les ranger dans le garde-manger, elle les a mis dans deux corbeilles contenant chacune le même nombre de fruits.

Dans chaque corbeille elle a mis des pommes et des poires.

Aldo, son mari, lui demande combien de poires elle a récoltées et Inès lui répond :

« Je me rappelle seulement deux choses : les  $\frac{2}{3}$  des fruits que j'ai mis dans la première corbeille sont des poires ; les  $\frac{2}{5}$  des fruits que j'ai mis dans la seconde corbeille sont des pommes ».

Aldo fait les comptes et trouve le nombre total de poires qu'Inès a récoltées.

**Quel est ce nombre ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Un ensemble de 60 objets de deux types est partagé en deux parties égales. Connaissant la fraction des objets d'un type dans une des moitié et celle des objets de l'autre type dans l'autre moitié, il faut déterminer le nombre total d'objets d'un type.

#### Analyse de la tâche

- Se représenter les 60 fruits répartis en deux corbeilles de 30 fruits chacune avec des poires et des pommes dont on ne connaît pas encore la répartition.
- Comprendre ensuite que la répartition interne de chaque corbeille est donnée : dans la première on pourra calculer le nombre de poires puis en déduire le nombre de pommes comme complément à 30 ; dans la seconde on pourra calculer le nombre de pommes puis en déduire le nombre de poires comme complément à 30.
- Passer aux calculs pour chaque corbeille : pour la première corbeille trouver un tiers de 30, 10 puis le double, 20 pour les poires, en déduire qu'il reste 10 pommes ; pour la seconde corbeille trouver un cinquième de 30, 6 puis le double, 12 pour les pommes, en déduire qu'il reste 18 poires.
- Additionner les poires des deux corbeilles  $20 + 18 = 38$  pour répondre à la question.

Ou, dessiner les 30 fruits de chaque corbeille, les distinguer (par des couleurs par exemple) après en avoir calculé le tiers et le cinquième et finalement compter les poires.

Ou bien, par l'arithmétique, calculer la moitié de 60 (30) et calculer  $(\frac{2}{3}) \times 30$  pour obtenir le nombre de poires (20) dans la première corbeille et  $(\frac{3}{5}) \times 30$  pour le nombre de poires (18) dans la seconde corbeille (ou calculer  $(\frac{2}{5}) \times 30 = 12$  pour le nombre de pommes et le soustraire de 30). Conclure que le nombre total de poires est 38.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (38 ou 38 poires) avec le détail de la procédure pour la répartition des fruits dans chaque corbeille (avec des calculs ou une représentation graphique claire)
- 3 Réponse correcte avec des explications incomplètes  
ou la réponse 20 poires dans la première corbeille et 18 dans la seconde
- 2 Réponse correcte sans explications  
ou réponse 32 ( $20 + 12$ ) due à la confusion entre les fruits dans la seconde corbeille  
ou réponse erronée due à une seule erreur de calcul (dans le calcul des  $\frac{2}{3}$  et des  $\frac{2}{5}$  de 30 ou dans les additions et soustractions) avec le détail de la procédure
- 1 Début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème (par exemple, réponse erronée car les fractions sont appliquées au nombre 60 au lieu de 30 : « les poires sont les  $(\frac{2}{3} + \frac{3}{5})$  de 60 »)

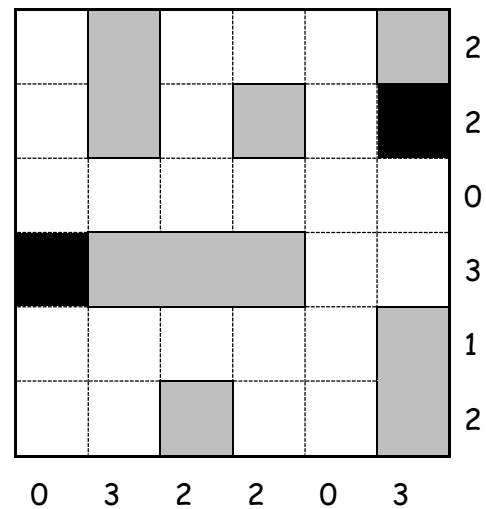
**Niveaux :** 5, 6, 7

**Origine :** Siena

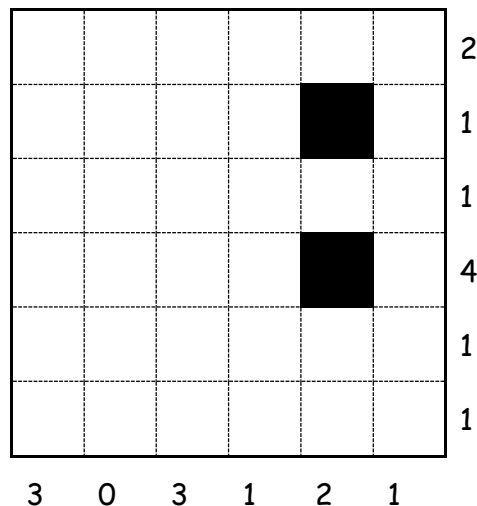
## 8. LA GRILLE DE MAX (II) (Cat. 5, 6, 7)

La grille ici à droite contient deux cases noires. Max y a placé six cartons : un rectangle de trois carrés, deux rectangles de deux carrés et trois cartons d'un carré chacun, en respectant ces consignes :

- aucun carton ne recouvre les cases noires de la grille,
- aucun carton ne touche un autre carton,
- dans chaque ligne, le nombre de cases occupées par des cartons est écrit à droite,
- dans chaque colonne, le nombre de cases occupées par des cartons est écrit en bas.



Max a dessiné une nouvelle grille avec d'autres cases noires et d'autres nombres à droite et en bas



Placez les six cartons dans cette nouvelle grille en respectant toutes les consignes.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

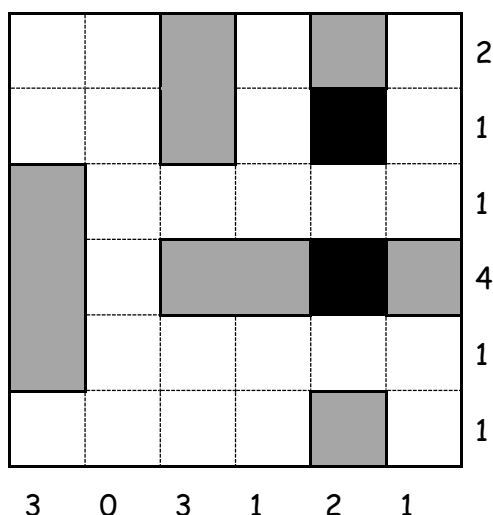
Dans une grille carrée de  $6 \times 6$ , placer six rectangles de différentes dimensions (un de  $3 \times 1$ , deux de  $2 \times 1$  et trois de  $1 \times 1$ ), en respectant des conditions sur leurs positions et sur le nombre des cases occupées dans chaque ligne et chaque colonne.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre les données du problème : les trois types de cartons, leurs nombres, leurs formes, leurs dispositions (les rectangles peuvent être dessinés horizontalement ou verticalement).
- Comprendre que chaque carton ne doit toucher aucun autre carton ni recouvrir une case noire.
- Comprendre la signification des nombres écrits au bout des lignes et des colonnes : nombres de cases occupées par des cartons dans chaque ligne et chaque colonne.
- Procéder par essais et ajustements : les élèves peuvent manipuler des rectangles découpés ou dessinés et essayer de les placer sur la grille de sorte que les conditions de l'énoncé soient vérifiées.

Ou bien, procéder par essais organisés. Cela peut être fait de différentes manières, par exemple :

- Commencer avec la position du rectangle ( $3 \times 1$ ), observer qu'il ne peut pas être placé sur une ligne (à cause de la colonne avec 0 cases occupées) et qu'il ne peut pas non plus être disposé sur la troisième colonne (cela empêcherait d'avoir 4 cases occupées sur la quatrième ligne). Par conséquent il doit être placé dans la première colonne.
- Compléter la quatrième ligne avec un rectangle  $2 \times 1$  et un carré.
- Procéder ensuite par essais et par exclusion pour placer les autres rectangles en travaillant d'abord sur les lignes et les colonnes avec le nombre le plus grand de cases occupées. (Une stratégie experte, non accessible à ces niveaux, se base sur une démarche hypothético-déductive qui considérerait les trois cas possibles de placement du rectangle  $3 \times 1$  pour conclure que seulement un permet de respecter toutes les contraintes).
- Arriver à la solution unique :



#### Attribution des points

- 4 La grille correctement remplie avec les 6 cartons, avec des explications ou les traces des essais effectués
- 3 La grille correctement remplie avec les 6 cartons sans explications
- 2 Réponse erronée, due au non respect de la contrainte que les cartons ne doivent pas se toucher (même par un sommet)
- 1 Début de recherche respectant certaines des contraintes imposées
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 5, 6, 7

**Origine :** Lyon

## 9. L'ÉQUIPE DE VOLLEY (Cat. 5, 6, 7, 8)

Sept joueurs vont disputer une partie de volley-ball. Leurs maillots ont des numéros tous différents.

La somme des nombres inscrits sur tous les maillots de l'équipe est inférieure à 55.

Le capitaine de l'équipe a le maillot numéro 5.

Les maillots des six autres joueurs portent des nombres qui sont des diviseurs de 36, et seulement deux de ces nombres sont impairs.

Ces six nombres peuvent être répartis en trois couples : dans chacun d'eux, un nombre est le double de l'autre.

**Quels peuvent être les numéros inscrits sur les maillots des sept joueurs ?**

**Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer six diviseurs de 36 tous différents, dont deux sont impairs et dont la somme est inférieure à 50, et tels qu'ils forment trois couples de nombres dont l'un est le double de l'autre.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut trouver six nombres différents de 5 et différents entre eux, dont la somme est inférieure à 50. (après avoir déduit de la somme totale 55 le seul nombre connu 5).
- Faire la liste de tous les diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 et identifier les couples de nombres où l'un est le double de l'autre : (1, 2) ; (2, 4) ; (3, 6) ; (6, 12) ; (9, 18) ; (18, 36).
- Comprendre que le couple (18, 36) est à écarter, puisque la somme de ses nombres est 54, elle dépasse donc à elle seule la limite 50 qui est supérieure à la somme des six nombres.
- Identifier parmi les cinq couples restant les groupes de trois couples, dont les nombres sont tous différents entre eux :  
(1, 2) ; (3, 6) ; (9, 18)      -      (1, 2) ; (6, 12) ; (9, 18)      -      (2, 4) ; (3, 6) ; (9, 18).
- Dans les trois cas, la somme des six nombres est inférieure à 50 (39 pour le premier groupe, 48 pour le second et 42 pour le troisième), mais il ne doit y avoir que deux nombres impairs, on en déduit donc qu'il ne reste que les deux groupes possibles : (1, 2) ; (6, 12) ; (9, 18) - (2, 4) ; (3, 6) ; (9, 18).
- Conclure que les numéros qui peuvent figurer sur les maillots des sept joueurs sont :  
1, 2, 5, 6, 9, 12, 18 et 2, 3, 4, 5, 6, 9, 18.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (1, 2, 5, 6, 9, 12, 18 et 2, 3, 4, 5, 6, 9, 18) avec des explications claires et complètes pour tous les raisonnements qui déterminent les deux possibilités (recherche des diviseurs de 36 et des couples possibles, ...)
- 3 Réponse correcte pour les deux possibilités de six nombres, avec des explications claires et complètes mais oublié d'insérer le nombre 5 connu ;  
ou réponse correcte avec des explications peu claires, mais avec une vérification (contrôle que la somme des nombres trouvés est plus petite que 55, que dans chaque couple un nombre est le double de l'autre et que seulement deux nombres sur six sont impairs)
- 2 Réponse correcte sans explication ni justification  
ou seulement une seule des deux possibilités (par exemple oublié du diviseur 1) avec des explications ou une vérification  
ou les deux possibilités correctes plus une réponse qui ne tient pas compte d'une des deux conditions :
  - la somme des diviseurs est supérieure à 49, réponse : 1, 2, 3, 5, 6, 18, 36,
  - trois diviseurs impairs de 36 y figurent, réponse : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 18
 ou bien, calculs faits par rapport à 54 comme nombre limite parce que la soustraction 55 - 5 n'a pas été faite
- 1 Début de recherche cohérente (les diviseurs de 36 sont donnés ou donnée d'au moins trois couples qui ne tiennent compte que de deux des trois conditions)
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 5, 6, 7, 8

**Origine :** Parma

**10. CONCOURS DE PECHE (Cat. 5, 6, 7, 8)**

Ahmed, Catherine et Bilel participent à un concours de pêche. À la fin, ils constatent que :

- Bilel a pêché 7 truites de plus qu'Ahmed,
- Catherine a pêché le double des truites pêchées par Bilel, c'est aussi le triple de celles pêchées par Ahmed.

**Combien chacun des trois amis a-t-il pêché de truites ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver trois nombres entiers, sachant que le second est supérieur au premier de 7 unités, et que le troisième est à la fois le double du second et le triple du premier.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'Ahmed a pêché moins de truites que Bilel et Catherine, que Bilel en a pris 7 de plus qu'Ahmed et Catherine le triple.
- Comprendre, en s'aidant éventuellement d'une représentation graphique, que le nombre de truites pêchées par Catherine étant « le double du nombre de truites pêchées par Bilel », s'exprime aussi comme « le double du nombre de truites pêchées par Ahmed plus 14 ».
- Comprendre que le nombre de truites pêchées par Catherine est aussi « le triple des truites pêchées par Ahmed ».
- Comparer les deux expressions du nombre de truites pêchées par Catherine :  $3A = 2A + 14$ , et en déduire que le nombre des truites pêchées par Ahmed est 14, puis que Bilel en a pêché  $14 + 7 = 21$  et Catherine  $3 \times 14 = 42$ .

Ou bien, après avoir compris les relations entre les nombres de truites pêchées, procéder par essais, éventuellement à l'aide d'un tableau. Par exemple :

Truites pêchées par Ahmed A	Truites pêchées par Bilel B = A + 7	Truites pêchées par Catherine C = 3A = 2B
5	12	15 ≠ 24
10	17	30 ≠ 34
...	...	...
<b>14</b>	<b>21</b>	<b>42 = 42</b>

Ou bien, considérer les multiples de 3 et ceux de 2, et chercher ceux dont la différence est 14.

Ou bien, désigner par  $x$  le nombre de truites pêchées par Ahmed, établir et résoudre l'équation  $2(x + 7) = 3x$ .

- Trouver dans chaque cas que Ahmed a pêché 14 truites, que Bilel en a pris 21 et Catherine 42.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (Ahmed 14, Bilel 21, Catherine 42) avec des explications claires et complètes de la procédure suivie (détail des relations trouvées, des calculs ou des tentatives éventuelles, résolution avec un graphique)
- 3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires
- 2 Réponse correcte sans explication
- 1 Début de recherche cohérente, par exemple une représentation graphique correcte ou quelques relations exactes données avec des lettres
- 0 Incompréhension du problème

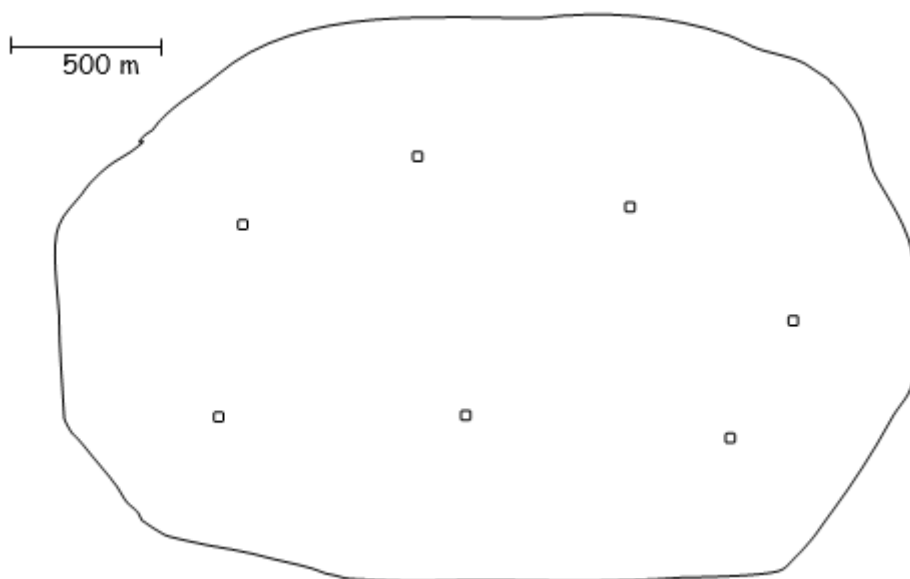
**Niveaux :** 5, 6, 7, 8

**Origine :** Siena



## 11. LA PORCHERIE (Cat 6, 7, 8)

Voici un plan d'un petit village de Transalpie. Le contour représente la limite du territoire du village et les petits carrés représentent les 7 fermes qui s'y trouvent. Le trait à gauche précise l'échelle du plan.



Les habitants du village ont décidé de construire une porcherie sur leur territoire. Mais, comme un élevage de cochons répand une odeur fortement désagréable, cette porcherie doit être construite à plus de 500 m de chaque ferme.

**Coloriez sur ce plan tous les endroits où la porcherie pourrait être construite.**

**Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.**

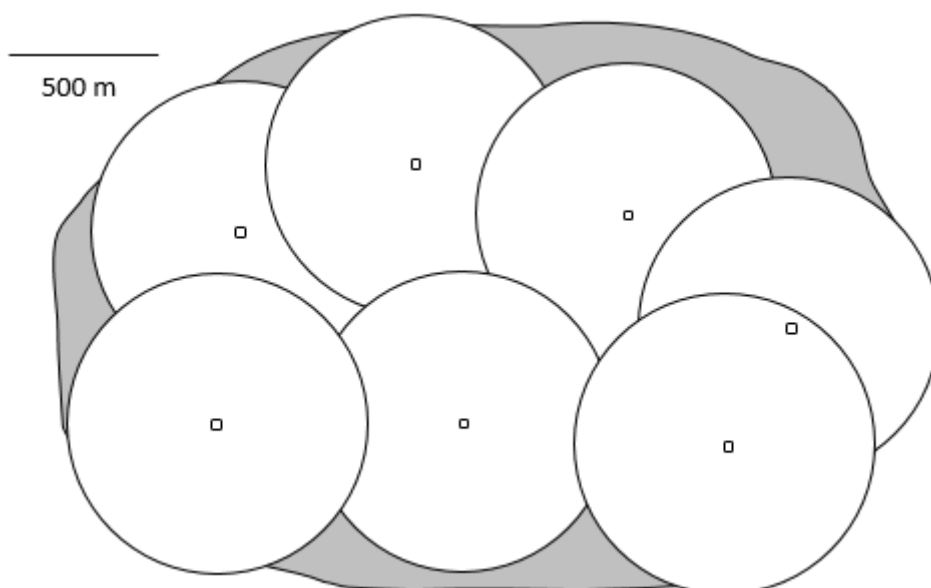
### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

À partir du dessin d'une ligne fermée avec 7 points à l'intérieur et à partir d'une longueur donnée, déterminer l'ensemble des points internes qui sont à une distance de chacun des 7 points supérieure à la longueur donnée.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que la porcherie doit être à plus de 500 m de chacune des fermes.
- Comprendre que sur le plan, la distance de la porcherie aux fermes doit être représentée par des segments plus grands que le segment donné.
- Comprendre qu'il faut colorier la partie du territoire de la commune dont les points sont situés à une plus grande distance de toutes les fermes que la longueur du segment donné.
- Procéder par essais avec la règle en trouvant des points à l'intérieur de la surface donnée qui ont une distance aux points donnés supérieure à la longueur donnée; se rendre compte qu'il est difficile de trouver ainsi tous les points qui vérifient la condition donnée.
- Se rappeler, alors, que la distance du centre d'un cercle aux points de la circonférence est la même pour tous, égale au rayon du cercle.
- En déduire que la distance du centre d'un cercle aux points situés à l'extérieur est plus grande que le rayon de ce cercle, alors que la distance du centre à ceux qui sont à l'intérieur est inférieure au rayon.
- Tracer les 7 cercles de rayon donné par le segment, centrés sur les 7 maisons.
- Colorier les parties du territoire de la commune qui sont à l'extérieur de tous ces cercles. Cela donne le dessin suivant, composé de 4 zones.
- Décrire la procédure utilisée.

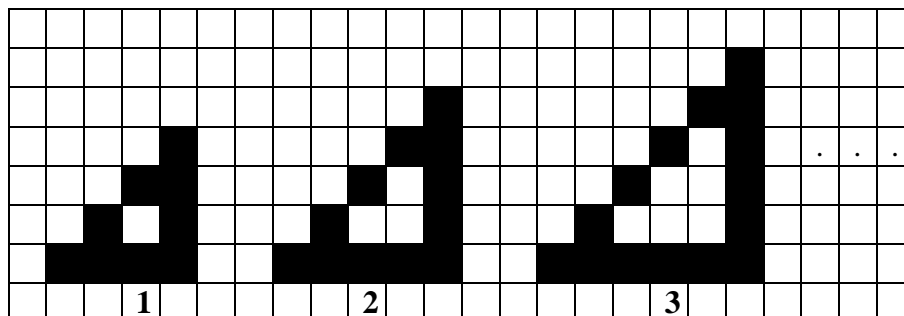
**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (les quatre zones correctement déterminées) avec des explications complètes (dessin précis des cercles qui montrent la maîtrise du compas et justification claire du recours à des telles figures géométriques)
- 3 Réponse correcte avec sur le dessin des traces de construction qui délimitent les 4 zones de manière imprécise, mais avec des explications complètes  
ou les 4 zones correctement dessinées mais avec des explications incomplètes ou imprécises
- 2 Réponse avec sur le dessin des traces, qui permettent de délimiter 3 zones cohérentes avec la question, avec des explications  
ou trois zones coloriées correctement, mais sans explication  
ou procédure seulement donnée par écrit mais non réalisée  
ou au moins 4 points (un dans chaque zone), découverts par essais et mesures directes
- 1 Réponse inachevée avec l'utilisation du compas pour au moins une maison  
ou au moins 2 points en différentes zones, déterminés au moyen de diverses tentatives et de mesures directes
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 6, 7, 8**Origine :** Franche-Comté

## 12. ESCALIERS (Cat. 7, 8, 9)

Voici les trois premiers dessins d'une suite de figures. Elles sont formées de carrés noirs disposés de façon à former des « escaliers » qui grandissent régulièrement d'une figure à la suivante.



Dans cette suite, quel sera le numéro attribué à la figure constituée de 210 carrés noirs ?

Expliquez comment avez vous trouvé votre réponse.

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver le rang du terme 210 dans la progression arithmétique de premier terme 9 et de raison 3 : 9, 12, 15, ... Les trois premiers termes sont définis par le nombre de carrés noirs figurant dans une succession de trois figures formant des "escaliers".

#### Analyse de la tâche

- Observer les figures et compter les carrés noirs : 9, 12, 15.
- Remarquer que d'une figure à l'autre, on ajoute 3 carrés noirs et dessiner une quatrième figure (ou plus) pour le vérifier : 9, 12, 15, 18.
- Écrire la suite des nombres de carrés noirs par escalier (progression arithmétique de raison 3) : 9, 12, 15, 18, 21, 24, ... et constater qu'il s'agit des multiples de 3, sauf 3 et 6. Calculer  $210 - 9 = 201$ , puis  $201/3 = 67$  et  $67 + 1 = 68$ .
- Poursuivre l'écriture jusqu'à 210 et compter les termes de la suite : de 1 à 68, ou calculer le nombre des multiples de 3 jusqu'à 210 :  $210 / 3 = 70$ , ne pas compter le 3 et le 6, trouver ainsi 68 termes pour la suite, ou faire des "sauts" de 30 par exemple : 9, 39, 69, ... 189, ou des sauts de 30 à partir de 30 : 30, 60, ... 210 et compter les sauts.

Ou bien, noter  $n$  le numéro d'une figure et associer à  $n$  le nombre de carrés noirs de la figure de rang  $n$ . Constaté que ce nombre s'écrit  $9 + 3(n-1)$ , soit  $3n + 6$ , et calculer le rang correspondant à 210 carrés noirs en résolvant l'équation  $3n + 6 = 210$ . Obtenir  $n = 68$ .

Ou bien, observer que si  $n$  est le numéro d'une figure, il y a  $n + 3$  carrés noirs sur le côté horizontal de cette figure et  $n + 2$  sur le côté vertical et enfin  $n + 1$  sur le côté oblique, soit tout  $3n + 6$ . En déduire que  $n = 68$  en calculant  $(210 - 6) / 3$ .

Ou bien, utiliser une autre procédure algébrique conduisant à la même formule : si  $n$  est le numéro d'une figure de la suite, on peut observer que cette figure a un nombre de carrés noirs égal à  $2(n + 3) + n$ , ce qui donne  $3n + 6$  et en résolvant l'équation  $3n + 6 = 210$  on obtient  $n = 68$ .

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (68) avec une explication claire de la stratégie utilisée (par exemple, en indiquant les trois carrés à ajouter d'une figure à l'autre)
- 3 Réponse correcte (68) avec une explication incomplète de la stratégie utilisée
- 2 Réponse erronée due à une erreur de comptage ou de calcul dans la détermination de 210, mais avec des explications claires  
ou bien réponse correcte sans explication
- 1 Début de recherche cohérente (par exemple, la progression arithmétique de raison 3 est donnée, mais de 2 à 5 erreurs ou des figures ignorées dans la suite)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9

Origine : Siena

### 13. CORBEILLES DE FRUITS (II) (Cat. 8, 9, 10)

Inès a récolté ses fruits, des poires et des pommes, et les a mélangés pour les répartir dans deux corbeilles. Elle observe que :

- les deux corbeilles contiennent le même nombre de fruits ;
- la moitié des fruits contenus dans la première corbeille sont des poires ;
- le tiers des fruits contenus dans la seconde corbeille sont des poires.
- Au total il y a 60 poires.

**Combien de pommes Inès a-t-elle récoltées ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

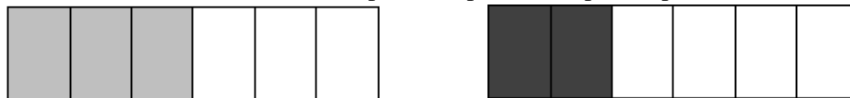
#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

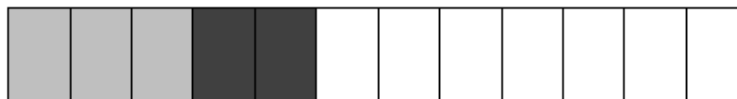
Calculer la somme de la moitié et des deux tiers d'un nombre sachant que la somme de la moitié et du tiers de ce nombre est égale à 60.

##### Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : il y a deux corbeilles contenant un même nombre de fruits (des pommes et des poires), et comprendre que dans la première corbeille, la moitié des fruits sont des poires et que dans la seconde corbeille, le tiers des fruits sont des poires.
- Comprendre qu'il y a 60 poires en tout, mais que ni le nombre de pommes ni le nombre total de fruits ne sont connus.
- Procéder graphiquement : par exemple, représenter les deux corbeilles par deux rectangles égaux partagés en parts qui permettent de prendre la moitié dans l'un et un tiers dans l'autre. Il faut alors diviser les rectangles en six parties (plus petit commun multiple de 2 et 3) et mettre en évidence les parties représentées par les poires dans les deux corbeilles :



- Observer que les parties colorées, qui représentent les poires dans les deux corbeilles, forment 5 parties sur 12 de l'ensemble des deux corbeilles. En déduire que les 60 poires correspondent au  $5/12^e$  de l'ensemble des fruits :



- Calculer combien de fruits correspondent à  $1/12^e$  :  $60 / 5 = 12$ , ce qui donne en tout  $12 \times 12 = 144$  fruits, de sorte qu'il y a 84 pommes ( $144 - 60$ ).
- Ou du fait que les poires forment les  $5/12^e$  des fruits du panier, en déduire que les pommes forment le reste,  $7/12^e$ , c'est-à-dire 84 ( $12 \times 7$ ).

Ou bien, par essais, considérer un nombre entier de poires plus petit que 60 dans la première corbeille, par exemple 20. Constaté que ce nombre ne convient pas, parce que 40 fruits dans la première et 120 dans la seconde serait contraire à la première information « les deux corbeilles contiennent le même nombre de fruits ». Obtenir finalement qu'avec 36 poires et 36 pommes dans la première corbeille, 24 poires et 48 pommes dans la seconde corbeille, on obtient un total de  $36 + 48 = 84$  pommes.

Ou bien, comprendre que les deux fractions  $1/2$  et  $1/3$  font référence au même nombre de fruits, exactement la moitié de l'ensemble des fruits. Dans la première corbeille, il y a la moitié de poires, ce qui correspond au quart du total, dans la seconde corbeille, il y a un tiers de poires, ce qui correspond au sixième du total. Donc, les 60 poires correspondent à  $1/4 + 1/6$  des fruits, c'est-à-dire les  $5/12^e$  et les pommes correspondent aux  $7/12^e$  de  $60 \times 12/5 = 84$ . Inès a donc récolté 84 pommes.

Ou bien, en tenant compte des indications : chercher un nombre divisible par 2 et par 3 plus grand que 60 et tel que sa moitié plus son tiers soit égal à 60. Parmi les multiples de 6 on trouve vite 72 comme nombre de fruits pour chaque panier. On en tire ensuite qu'il y a 36 les pommes dans le premier panier, alors que dans le deuxième il y en a 48, les deux tiers de 72, ce qui donne au total 84.

- Algébriquement, on peut arriver au même résultat en établissant une équation de premier degré du type :  $1/2x + 1/3x = 60$ , d'où l'on tire que  $x = 72$ , nombre de fruits pour chaque panier, le nombre de pommes est donc :  $(72:2) + (2/3) \times 72 = 84$ .

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (84 pommes) avec des calculs détaillés ou une représentation graphique claire
- 3 Réponse correcte avec des calculs peu clairs  
ou avec une représentation ou un schéma incomplet
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou procédure correcte, mais sans conclusion (par exemple, indication du nombre total de fruits, mais pas le nombre de pommes)  
ou réponse erronée due à une seule erreur de calcul
- 1 Début de recherche correcte, par exemple représentation graphique correcte de chaque corbeille
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 8, 9, 10

**Origine :** Siena

## 14. LA PÂTE À TARTINER (Cat. 8, 9, 10)

Jean aime beaucoup la pâte à tartiner aux noisettes *Noisella* et en achète régulièrement. La pâte *Noisella* est habituellement vendue en pots de 800 grammes à 4,50 euro le pot.

Aujourd'hui Jean a reçu trois publicités qui font des offres spéciales pour la pâte *Noisella*.

La première publicité déclare que dans le magasin A, les pots de pâte *Noisella* de 800 grammes sont vendus avec une réduction de 30 %.

La deuxième publicité annonce que dans le magasin B, la pâte à tartiner est vendue dans des pots plus grands qui contiennent 30 % de produit en plus que ceux qui sont vendus d'habitude, mais qui valent encore 4,50 euro.

La troisième publicité indique que dans le magasin C, un pot de 800 grammes coûte 4,50 euro mais que pour l'achat de 3 pots, chacun de 800 grammes, un quatrième pot est offert gratuitement.

**Quel magasin Jean devrait-il choisir pour acheter la pâte *Noisella* la plus avantageuse ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Sur trois offres, déterminer la plus avantageuse pour l'achat d'un produit : un rabais de 30% du prix, une augmentation de 30% de la quantité du produit et une offre « 4 pour 3 ».

#### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut comparer les prix de la même quantité de pâte à tartiner, en tenant compte des différentes offres.
  - Comprendre que dans le magasin A, le rabais est effectué sur le prix initial de 800 g de pâte. Le prix du pot est alors :  $4,50 \times 0,7 = 3,15$  euro.
- Ou bien, en calculant d'abord les 30 % de 4,50 [ $(4,50 : 100) \times 30 = 1,35$ ], obtenir le prix en promotion de 800 g de pâte :  $4,50 - 1,35 = 3,15$  euro.
- Comprendre que dans le magasin B, le prix initial reste inchangé et que pour le même prix le poids de pâte est supérieur de 30%, donc calculer le poids de pâte en plus :  $800 \times 1,3 = 1040$  g de pâte.
- Ou bien, en calculant d'abord les 30 % de 800, [ $(800 : 100) \times 30 = 240$ ], obtenir le poids de pâte vendu 4,50 euro :  $800 + 240 = 1040$  g. Puis calculer le prix de 800 grammes de pâte :  $4,50 \times 800/1040 \approx 3,46$  euro.
- Comprendre que dans le magasin C, 4 pots de 800 g sont vendus au prix de 3 pots, donc :  $3 \times 4,50 = 13,50$  euro. Le prix d'un pot de 800 g est alors :  $13,50/4 = 3,375$  euro.
  - En déduire que l'offre la plus avantageuse est celle du magasin A : 3,15 euro pour 800 g de pâte.
- Ou bien, calculer le prix d'un kilogramme de pâte à tartiner pour chacune des offres et comparer.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (magasin A : 3,15 euro pour 800 g de pâte, ou toute autre réponse proportionnelle), avec explication claire et complète (avec les prix de chacune des trois pâtes), ou avec une procédure bien organisée des calculs
- 3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes ou avec une procédure mal organisée des calculs ou réponse erronée pour une erreur de calcul, mais procédure correcte
- 2 Réponse correcte avec seulement le calcul du coût de 800 g de pâte dans le magasin A ou calcul correct des trois prix sans unité commune et sans comparaisons
- 1 Réponse correcte sans explication ou début de recherche ; par exemple : calcul correct du coût de 800 g de pâte dans le magasin A ou dans le magasin C, sans conclure
- 0 Incompréhension du problème

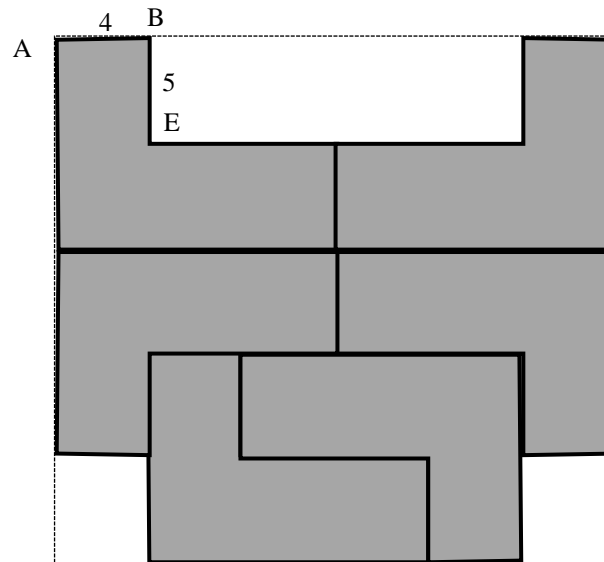
**Niveaux :** 8, 9, 10

**Origine :** Franche-Comté

### 15. UN RECTANGLE EN MORCEAUX (Cat. 8, 9, 10)

Anna a disposé six pièces identiques en forme de L qui recouvrent presque entièrement un rectangle (voir la figure sur laquelle les pièces sont en gris et la partie du rectangle non recouverte en blanc).

Pour chaque pièce, les deux petits côtés désignés par AB et BE sur la pièce du haut à gauche, mesurent respectivement 4 cm et 5 cm.



Quelles sont les dimensions du rectangle ?

Quelle est l'aire de la partie du rectangle non utilisée par Anna ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

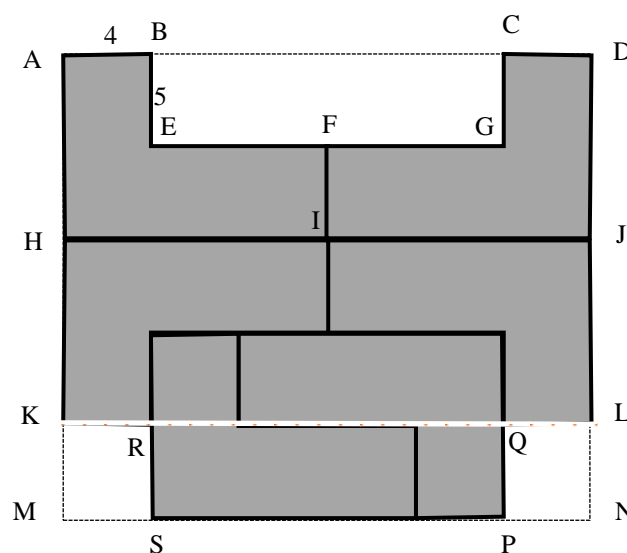
#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Sur un rectangle sont posées six pièces identiques en forme de L dont deux dimensions sont données. Déterminer les dimensions et l'aire de la partie du rectangle non recouverte.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre de l'observation ou par un découpage analogue à celui de la figure, que le côté FI doit mesurer 5 cm, sinon on ne pourrait pas disposer ainsi les 6 pièces du rectangle comme sur le dessin.



- Observer qu'on peut trouver la longueur AM du côté vertical de ce rectangle : en regardant les deux pièces en forme de L juxtaposés en bas de la figure, on constate que  $FI = 5$  cm, d'où  $AH = 10$  cm et on en déduit que ce côté mesure :  $10 + 10 + 5 = 25$  cm.
- Se rendre compte que sur le côté horizontal [AD], seulement les deux longueurs de 4 cm sont connues. La longueur EF reste inconnue. Notons  $l$  cette mesure en cm.
- Observer qu'on peut exprimer cette mesure de deux manières différentes : d'une part en haut, AD se décompose en deux longueurs de 4 cm et deux longueurs EF, d'où une mesure de  $4 + l + l + 4$  ; d'autre part en bas, KL se décompose en quatre longueurs de 4 cm et une longueur égale à EF, d'où une mesure de  $4 + 4 + l + 4 + 4$ .
- Les deux expressions sont égales et on trouve que  $l = 8$  cm. Ainsi le côté horizontal mesure 24 cm.

Ou bien,

- Essayer de dessiner des pièces plus grandes de formes identiques et s'apercevoir qu'il y a une seule possibilité car les longueurs de [AB] et de [EB] sont fixées : la longueur  $l$  doit être le double de la longueur du côté AB.
- Pour trouver l'aire de la partie du rectangle non recouverte par les six pièces, considérer qu'elle est la somme des aires du rectangle BCGE et des deux rectangles blancs KMSR et LNPQ : d'après les longueurs trouvées, cela donne  $5 \times 16 + 2 \times 5 \times 4$  cm<sup>2</sup>, soit 120 cm<sup>2</sup>.

Ou bien,

- observer qu'elle correspond à la différence entre l'aire du rectangle entier :  $24 \times 25 = 600$  cm<sup>2</sup> et l'aire des six pièces. L'aire de chaque pièce mesure :  $(4 \times 5) + (5 \times 12) = 80$  cm<sup>2</sup>. Les six pièces ont donc une aire de  $80 \times 6 = 480$  cm<sup>2</sup>. L'aire de la partie blanche mesure donc :  $600 - 480 = 120$  cm<sup>2</sup>.

#### Attribution des points

- 4 Réponses correctes (dimensions du rectangle : 24 et 25 cm, aire de la partie non utilisée : 120 cm<sup>2</sup>) avec la description claire et complète de la procédure et des calculs ou explication claire du fait que EF ne peut être que le double de  $AB = 4$  cm
- 3 Les deux réponses correctes avec l'identification des segments de 4 cm et 5 cm sur la figure, mais avec une explication incomplète, ou seulement donnée par des calculs numériques sans explications géométriques ou seulement par des mesures prises sur le figure ou encore à « vue d'œil » (par exemple avec un pavage ou « quadrillage » de la figure par des rectangles de 4 sur 5)
- 2 Réponses correctes sans explication  
ou des erreurs de calcul dans une seule réponse, et l'autre correcte mais avec des explications incomplètes ;  
ou des réponses erronées parce qu'on a utilisé la dimension de 12 cm ou 20 cm au lieu de 24 cm
- 1 Début de recherche cohérente qui montre la compréhension du problème (par exemple, une relation entre les longueurs, l'affirmation que EF est double de 4 cm sans explication...)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Aosta



## 16. UN DIMANCHE À BICYCLETTE (Cat. 9, 10)

Alexandra roule à bicyclette sur une piste cyclable où il y a des pancartes qui indiquent combien il reste de kilomètres jusqu'à l'arrivée. Après avoir roulé pendant 50 minutes, Alexandra voit la pancarte « 18 km » et deux heures après être partie, elle voit écrit « 4 km ». Alexandra ne s'est pas arrêtée et a toujours roulé à la même vitesse.

**Quelle est la longueur de la piste cyclable et combien de temps Alexandra a-t-elle mis pour la parcourir en entier ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

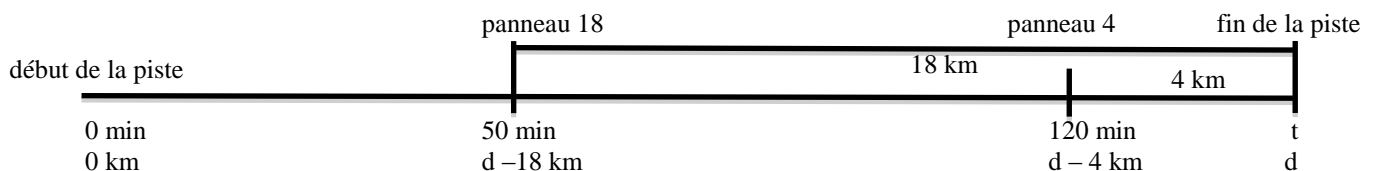
### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Calculer la longueur d'une piste cyclable ainsi que le temps mis à la parcourir en entier, connaissant, pour deux endroits distincts, les temps de parcours depuis le départ et les distances restantes jusqu'à l'arrivée.

#### Analyse de la tâche

- Se représenter la piste du départ à la fin avec les deux panneaux mentionnés et faire correspondre les emplacements des pancartes, les distances mentionnées, les durées de parcours d'Alexandra, en se rendant compte que les durées sont exprimées depuis le départ et les distances depuis la fin, pour aboutir à un schéma du type :



- Se rendre compte que cette première représentation tirée de la lecture de l'énoncé ne donne pas de durées ni de distances correspondantes pour les différentes « étapes » ou « tronçons » du parcours mais qu'on peut en calculer certains dont en particulier  $70 = 120 - 50$  en minutes, pour l'étape II et  $14 = 18 - 4$  en km pour le tronçon de cette étape.

	(départ)	(panneau 18)	(panneau 4)	(fin de la piste)
durées (min)	0	50	120	t indéterminé
distances (km)	0	d - 18	d - 4	d indéterminé

Les étapes sont indiquées par des flèches : étape I (0 à 50 min), étape II (50 à 120 min), et étape III (120 à t min). Les distances correspondantes sont : ? km pour l'étape I, 14 km pour l'étape II, et 4 km pour l'étape III.

- On arrive ici aux correspondances entre les durées et les distances qui se résument ainsi :
 

durées (minutes)	50	70	?
distances (km)	?	14	4
  - Compléter finalement deux des trois couples (50 ; ?), (70 ; 14) et (? ; 4) en faisant appel à ses connaissances sur la vitesse et la proportionnalité puisque la vitesse est constante.
  - Il y a de très nombreuses manières de trouver les grandeurs inconnues, allant des procédures « pas à pas » du genre : 14 km en 70 minutes équivaut à 7 km en 35 minutes, 1 km en 5 minutes, ... 10 km en 50 minutes, 4 km en 20 minutes, à celles qui font appel aux écritures littérales comme  $50/x = 70/14$  et  $y/4 = 70/14$ .
  - Après avoir trouvé 10 km en 50 minutes et 20 minutes pour 4 km, calculer la longueur totale de la piste :  $10 + 14 + 4 = 28$  km et la durée du parcours d'Alexandra :  $50 + 70 + 20 = 140$  minutes, soit 2 heures 20 minutes.
- Ou bien, en représentant la situation comme ci-dessus, on peut remarquer qu'en 70 minutes, Alexandra parcourt 14 km. Sa vitesse est donc :  $14/70 = 0,2$  km/min.
- En 120 min, elle parcourt  $0,2 \times 120 = 24$  km. On en déduit que la longueur de la piste est :  $24 + 4 = 28$  km. La durée du trajet est :  $28/0,2 = 140$  min.

#### Attribution des points

- 4 Les deux réponses correctes (28 km et 140 min ou des valeurs égales exprimées avec d'autres unités de mesure), avec des explications claires et complètes (mentionnant le passage par 70 minutes pour 14 km et les calculs pour les autres étapes)
- 3 Les deux réponses correctes avec des explications peu claires ou incomplètes (sans mentionner comment passer du couple 14 km en 70 minutes aux autres couples, ou sans le détail des additions)

- ou bien une seule erreur de calcul avec des explications claires et complètes
- 2 Les deux réponses correctes sans explication  
ou une seule réponse correcte avec une explication claire et complète  
ou seulement les réponses : 10 km en 50 minutes et 20 minutes pour 4 km, sans effectuer les additions pour l'ensemble du parcours et de la durée, avec explications
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple : 70 minutes pour 14 km)
- 0 Incompréhension du problème (par exemple Alexandra parcourt 18 km en 50 min)

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Parma

## 17. LES QUATRE CERCLES (CAT. 9, 10)

Luc dessine un cercle et son ami Matteo dessine un second cercle de même centre que le premier et dont la longueur mesure 10 cm de plus que celui de Luc.

Angela dessine un autre cercle de même centre beaucoup plus grand que celui de Luc et son amie Licia dessine un autre cercle de même centre que celui d'Angela, dont la longueur mesure aussi 10 cm de plus.

Luc et Matteo déterminent la distance entre leurs deux cercles, Angela et Licia font la même chose avec leurs cercles. À la fin les quatre amis s'aperçoivent que les deux distances sont égales.

**Et s'ils dessinaient d'autres couples de cercles concentriques dont les longueurs diffèrent de 10 cm, la distance entre les deux cercles d'un couple à l'autre varierait-elle ?**

**Justifiez votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Montrer que dans des couples de cercles concentriques dont les longueurs diffèrent d'une même mesure, la distance entre les deux cercles est constante.

#### Analyse de la tâche

- Dessiner au moins deux couples de cercles concentriques.
  - Comprendre que l'expression « 10 cm de plus » se réfère à la longueur d'un cercle et que les 10 cm représentent la longueur d'un arc, non mesurable à la règle.
  - Comprendre que la distance entre deux cercles concentriques se mesure sur une demi-droite ayant pour origine leur centre et correspond à la différence des deux rayons.
  - Procéder par essais en attribuant des valeurs numériques différentes au rayon du cercle intérieur et trouver dans chaque cas respectivement les longueurs des cercles intérieur et extérieur (en ajoutant 10), le rayon du cercle extérieur et donner enfin la mesure de la différence des rayons.
- Ou bien, procéder par essais en attribuant des valeurs numériques différentes à la longueur du cercle intérieur et déduire dans chaque cas respectivement la mesure des longueurs du cercle extérieur (en ajoutant 10), des rayons des deux cercles et, enfin, de leur différence.
- Comparer les résultats obtenus : avec la calculatrice ou avec l'approximation de  $\pi = 3,14$ , on obtient dans les deux cas une valeur approchée de 1,59 ou 1,6 cm. Sans l'approximation de  $\pi$ , la réponse est  $5/\pi$ .
  - Conclure que la distance est la même dans tous les cas des exemples numériques considérés.
  - Constaté que le résultat est général : en notant respectivement par  $c$  et  $C$  les mesures des longueurs des cercles intérieur et extérieur et par  $r$  et  $R$  les mesures de leurs rayons, on obtient  $C = 2\pi r + 10$ ,  $R = (2\pi r + 10) / (2\pi)$ ,  $R - r = 5/\pi$ .

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (la distance est toujours la même) avec justification du cas général (rédigée avec l'usage de lettre ou de manière rhétorique (par exemple : nous savons que pour trouver le rayon à partir de la longueur d'un cercle, il faut diviser par  $\pi$  et par 2, si la longueur du cercle a de 10 cm de plus, il faudra aussi diviser 10 par  $\pi$  et par 2...))
- 3 Réponse correcte avec une justification basée sur plus de deux exemples numériques (avec le détail des calculs jusqu'à trouver la distance  $5/\pi$  ou une de ses approximations)
- 2 Réponse correcte avec une justification basée sur seulement deux exemples numériques, (avec le détail des calculs jusqu'à trouver la distance  $5/\pi$  ou une de ses approximations)
- 1 Début de recherche cohérente  
ou réponse « non » avec deux exemples numériques, à cause d'une erreur de calcul, mais avec une procédure correcte
- 0 Incompréhension du problème ou seulement une des réponses « oui » ou « non »

Niveaux : 9, 10

Origine : Gr 0<sup>0</sup>

## 18. DRÔLES DE TRIANGLES (Cat. 9, 10)

Un triangle équilatéral a un côté dont la longueur mesurée en centimètres est un nombre entier. Gabrielle calcule l'aire de ce triangle, exprimée en centimètres carrés.

Guy calcule le périmètre du triangle, exprimé en centimètres.

Gabrielle et Guy ne trouvent pas le même nombre.

**Est-il possible de construire un triangle équilatéral (dont la longueur du côté mesurée en centimètres est un nombre entier), pour que Gabrielle et Guy trouvent le même nombre ?**

**Justifiez votre raisonnement.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

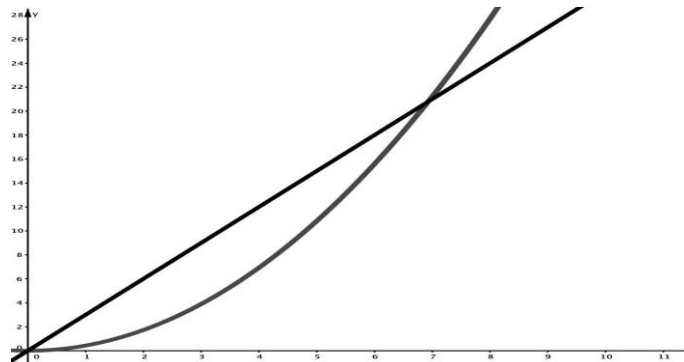
Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral, dont le coté mesuré en centimètres est un nombre entier et pour lequel l'aire mesurée en  $\text{cm}^2$  et le périmètre mesuré en cm sont exprimés par le même nombre.

#### Analyse de la tâche

- Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la hauteur d'un triangle équilatéral de côté  $n$  (entier) ( $h = \frac{\sqrt{3}}{2}n$ )
- Calculer le périmètre  $P$  et l'aire  $A$  du triangle. On trouve :  $P = 3n$  et  $A = \frac{\sqrt{3}}{4}n^2$ . Conclure qu'avec  $n$  entier, l'aire  $A$  n'est pas entière, donc différente de  $P$ .
- Écrire l'équation :  $\frac{\sqrt{3}}{4}n^2 = 3n$  dont les solutions sont  $n = 0$  ou  $n = 4\sqrt{\frac{3}{3}}$ , et conclure que ces deux valeurs sont à écarter, car d'une part  $n > 0$  et d'autre part  $n$  est un entier, ce qui n'est pas le cas de  $4\sqrt{\frac{3}{3}}$ .

Ou bien, faire des essais de manière systématique, par exemple sous forme de tableau :

$n$	Aire ( $\text{cm}^2$ )	Périmètre (cm)
1	0,43	3
2	1,73	6
3	3,90	9
4	6,93	12
5	10,83	15
<b>6</b>	<b>15,59</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>21,22</b>	<b>21</b>
8	27,71	24
9	35,07	27
10	43,30	30



- Pour  $n = 6$ , la mesure de l'aire est strictement inférieure à celle du périmètre.
- Pour  $n = 7$ , la mesure du périmètre est strictement inférieure à celle de l'aire.
- Cela nous permet d'en déduire qu'il n'existe pas d'entier répondant à la question posée.

Ou bien, observer, éventuellement après quelques tentatives, que le périmètre est toujours un nombre entier (produit d'un nombre entier par 3), alors que dans le calcul de l'aire il apparaît toujours  $\sqrt{3}$  multipliée par un nombre rationnel et conclure que les deux nombres ne peuvent pas être égaux.

Ou bien, représenter graphiquement pour  $x > 0$ , les variations des deux fonctions  $P(x) = 3x$  (demi droite) et  $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$  (arc de parabole).

- Observer que  $P(x) = A(x)$  pour un  $x$  non entier compris entre 6 et 7 et que pour  $x > 7$ , les points de même abscisse sur la droite et sur la parabole s'écartent de plus en plus, ce qui montre qu'elles n'ont pas d'autre point commun.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (non) avec justifications claires qui mettent en évidence la stratégie d'abord géométrique avec Pythagore, puis algébrique, ou bien par essais organisés faisant référence à la mesure de la hauteur du triangle équilatéral
- 3 Réponse correcte étayée par plusieurs tentatives qui ne mettent pas clairement en évidence l'impossibilité ou la réponse erronée (oui, le côté mesure 7 cm, par approximation de  $4\sqrt{3}$ , avec des explications claires
- 2 Un nombre d'essais compris entre 3 et 5

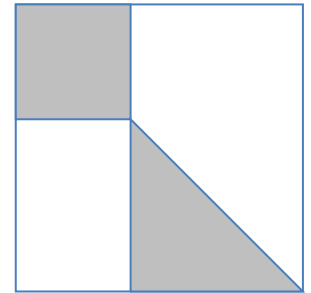
- 1 Début de recherche correcte (calcul d'au moins une aire et un périmètre)
- 0 Incompréhension du problème ou réponse correcte sans explication

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Luxembourg

## 19. CARRELAGES EN OR (Cat 10)

Un riche banquier veut revêtir les murs de sa salle de bains avec des carreaux carrés en céramique blanche de 48 cm de côté, décorés par un motif recouvert d'or. Le motif choisi est un partage du carreau en quatre parties : un petit carré et un triangle rectangle tous deux recouverts d'or, un rectangle et un trapèze laissés en blanc. Ces quatre parties sont disposées ainsi : un sommet du petit carré coïncide avec un sommet du carreau et le sommet opposé du petit carré coïncide avec un sommet du triangle (voir la figure). Comme le prix de l'or est très élevé, le banquier veut trouver la décoration qui utilise le moins de quantité d'or, sans changer le motif choisi.



**Quelle doit être au mm près la mesure du côté du petit carré en or qui permette de minimiser la dépense ? Expliquez votre raisonnement.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Dans un carré partagé en quatre parties (un carré, un rectangle, un triangle, un trapèze disposés selon une figure donnée) déterminer la mesure du côté du petit carré de manière à ce que la somme de l'aire de ce petit carré et de celle du triangle soit minimale.

#### Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la dépense minimale est liée au minimum de l'aire de la partie en or
- Percevoir les positions relatives des quatre polygones, s'apercevoir qu'ils ont un sommet commun qui se situe sur la diagonale du carreau.
- Constater qu'aucune des dimensions des quatre figures n'est donnée, mais qu'elles sont dépendantes les unes des autres. Voir qu'avec un « petit » carré on a un « grand » triangle, un rectangle « allongé »...
- En termes de mesures, se rendre compte que si l'on connaît celle du côté du petit carré, on peut calculer son aire ainsi que celle du triangle rectangle.
- Choisir une mesure pour le côté du petit carré, trouver celle des deux côtés de l'angle droit du triangle (par différence à 48 cm) et calculer l'aire totale des deux figures. Constater que cette aire totale varie selon le choix de la mesure du côté du petit carré et effectuer quelques essais.

- Regrouper les différentes valeurs déterminées, par exemple :

côté du carré	10	15	20	16	17	16,5	15,5	15,9	16,1 ...
aire du carré	100	225	400	256	289	272,25			
côté du triangle	38	33	28	32	31	31,5			
aire du triangle	722	544,5	392	512	480,5	496,125			
aire totale	822	769,5	792	768	769,5	768,375			

et les organiser pour constater que la plus petite valeur de l'aire totale (768) ainsi calculée est obtenue pour un côté du carré mesurant 16 cm.

- Se convaincre que l'aire 768 cm<sup>2</sup> est minimale pour un carré de côté 16 cm, en calculant les aires correspondant à des mesures autour des 16 cm, par exemple pour 15,9 et 16,1, etc.

Ou bien, supposer que la longueur du côté du petit carré est la moitié de celle du côté du grand carré. L'aire du petit carré est alors le quart de l'aire du grand. Le triangle a pour aire  $1/2 \times 1/2 : 2 = 1/8$ . Donc, l'aire des parties en or est  $1/4 + 1/8 = 3/8$  de l'aire du grand carré. Celle-ci mesure donc  $3/8 \times 48 \times 48 = 864$  cm<sup>2</sup>.

- Supposer ensuite que le côté du petit carré soit le 1/4 du côté grand. L'aire du petit carré est donc égale à  $1/4 \times 1/4 = 1/16$ . Le triangle a son côté égal aux 3/4 du côté du grand carré, son aire est  $3/4 \times 3/4 \times 1/2 = 9/32$ , donc l'aire totale en or est  $1/16 + 9/32 = 11/32$  de l'aire du grand carré, soit  $11/32 \times 304 = 792$  cm<sup>2</sup>.
- Essayer avec 1/5 pour le côté du petit carré etc. Après ces diverses tentatives avec 1/3 pour le côté du petit carré et 2/3 pour le côté du triangle, on a pour l'aire de la partie dorée  $1/9 + 2/9 = 3/9 = 1/3$ , soit  $1/3 \times 2304 = 768$  cm<sup>2</sup>. Le côté du carré qui minimise l'aire en or est donc  $1/3 \times 48 = 16$  cm.

Ou bien, algébriquement, exprimer l'aire A de la partie dorée en fonction de la mesure l du côté du petit carré pour obtenir la relation :  $A = l^2 + (48 - l)^2/2$ ,

- déterminer le minimum de cette fonction par des approximations successives en donnant quelques valeurs à la variable l autour de 16, au millimètre près,

- ou reconnaître qu'il s'agit de l'équation d'une parabole :  $A = (3/2)l^2 - 48l + 1152$ , avec la concavité tournée vers le haut, et interpréter le minimum de la fonction  $A$  comme l'ordonnée de son sommet dont l'abscisse  $l$  est égale à  $48/3 = 16$  cm exactement.

Procédure experte : dans le cadre de l'étude des fonctions polynômes du second degré, le trinôme  $A$  s'écrit :

$$A = l^2 + (48 - l)^2/2 = 3/2(l - 16)^2 + 768 ,$$

ce qui permet de déterminer immédiatement que le minimum de  $A$  est obtenu pour  $l = 16$  cm.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (16 cm), avec des explications qui montrent clairement que la valeur trouvée correspond à l'aire minimale de 768 cm<sup>2</sup>. (Essais organisés autour des valeurs proches de 16 cm, sans citer explicitement le terme « fonction », mais faisant comprendre clairement que « avant et après 16 » les valeurs de l'aire sont supérieures à 768) ou essais organisés avec pour le côté du petit carré l'utilisation de fractions de celui du grand et conclusion : le tiers soit 16 cm réalise le minimum cherché
- 3 Réponse correcte avec des essais non organisés et des explications qui ne se réfèrent pas aux variations de l'aire, (comme si 16 avait été trouvé par hasard)
- 2 Réponse correcte sans explications  
ou réponse erronée due à une erreur de calcul  
ou réponse erronée due à une erreur dans l'expression algébrique de l'aire dorée
- 1 Début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 10

**Origine :** Parma