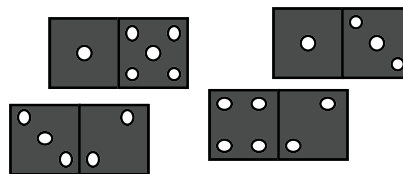
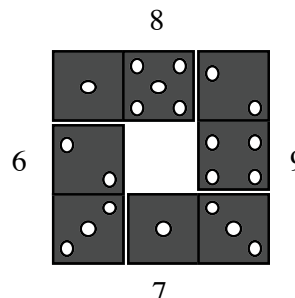


1. DOMINOS (Cat. 3, 4)

Sophie a ces quatre dominos :



Elle les dispose en carré, comme sur cette figure :



Elle constate qu'il y a 8 points sur le côté du haut, 9 points sur le côté de droite, 7 points en bas et 6 points à gauche, mais elle aimerait qu'il y ait le même nombre de points sur chaque côté.

Arrivera-t-elle à disposer ces quatre dominos, toujours en carré, mais de manière à avoir le même nombre de points sur chaque côté ?

Dessinez une solution pour chaque nombre de points que vous avez trouvé.

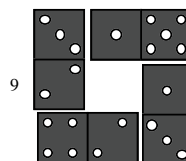
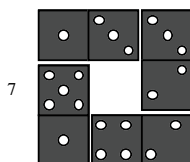
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition

Analyse de la tâche

- Comprendre, au travers de l'exemple de la deuxième figure, ce que signifie la « somme des points sur un côté ».
- Comprendre qu'en retournant un des dominos ou en échangeant les places de deux d'entre eux, on modifie le nombre de points sur les côtés.
- Constater que, vu que certains dominos ont 6 points, le minimum de points sur chaque côté est 7, (obtenu par un domino de 6 points et une partie de domino à 1 point). Se construire un modèle des quatre dominos (découpage,) et procéder par essais. Par exemple pour 7 points, en plaçant le (1 ;5) à côté du « 1 » du domino (1 ;3) et chercher s'il est possible de placer les 2 autres de façon à obtenir 7 sur tous les côtés. (solution, voir ci-dessous)
- Essayer avec une somme de 8 points, (pas de solution) puis avec une somme de 9 points en se rendant compte que, par rapport à la solution de 7 points, les parties de « 5 points » et « 4 points » doivent être placées aux sommets des carrés, où elles sont comptées deux fois, alors que les parties « 1 point » et « 2 points » doivent être sur des milieux de côtés, où elles ne sont comptées qu'une seule fois. (Voir solution ci-dessous)
- Essayer avec des sommes supérieures à 9 et comprendre que les recherches sont inutiles car les points à disposition ne suffisent plus.



Attribution des points

- 4 Solutions correctes : un dessin pour une disposition avec 7 points et un autre pour une disposition avec 9 points
- 3 Une seule des deux solutions avec dessin correct
ou les deux solutions accompagnées d'une solution erronée (donnant un autre total ou avec une faute de calcul)
- 2 Une seule solution correcte et deux erreurs
ou deux solutions avec 3 côtés seulement de même somme
- 1 Une solution avec 3 côtés seulement de même somme
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Bourg-en-Bresse, CI

2. LES TARTELETTES (Cat. 3, 4)

Un matin, le pâtissier du pays des Douceurs reçoit ce message :

12 illustres personnages vont venir goûter tes fameuses tartelettes. Ils arriveront dans  jours, à midi.

Mais une grosse tache empêche de lire le nombre de jours.

Le pâtissier se met aussitôt au travail pour avoir au plus vite 12 tartelettes, une pour chaque personnage. Mais la préparation est longue et le pâtissier ne peut en faire que 5 chaque matin. Malheureusement pour lui, ses quatre fils sont très gourmands et, chaque après-midi, ils mangent chacun une des tartelettes pour leur goûter.

Heureusement, lorsque les illustres personnages arrivent, le pâtissier a exactement 12 tartelettes prêtes.

Quel est le nombre caché par la tache sur le message ?

Expliquez comment vous avez fait pour le trouver.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique : addition et soustraction

Analyse de la tâche

- Comprendre les différentes relations temporelles contenues dans l'énoncé :
 - les tartelettes sont préparées le matin ;
 - les enfants en mangent 4 chaque après-midi ;
 - les invités arrivent à midi (avant que les enfants ne puissent les manger).

- Procéder à un comptage progressif, jour par jour, en s'aidant par exemple d'un tableau de ce genre :

jour	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
tartelettes produites le matin	5	5	5	5	5	5	5	5
tartelettes disponibles à midi :	5	6	7	8	9	10	11	12
tartelettes mangées au goûter	4	4	4	4	4	4	4	4
tartelettes disponibles le soir	1 (5-4)	2 (1+5-4)	3 (2+4-4)	4	5	6	7	

Ou : comprendre que les 7 premiers jours, la fabrication et les pertes reviennent à une production de 1 tartelette/jour et que les 5 tartelettes produites le 8^e jour permettent d'atteindre 12.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (8) avec explication exhaustive où apparaissent les augmentations et diminutions
- 3 Réponse correcte avec explication partielle
- 2 Réponse correcte sans explication
- 1 Début de raisonnement ou réponse « 12 jours »
- 0 Incompréhension du problème.

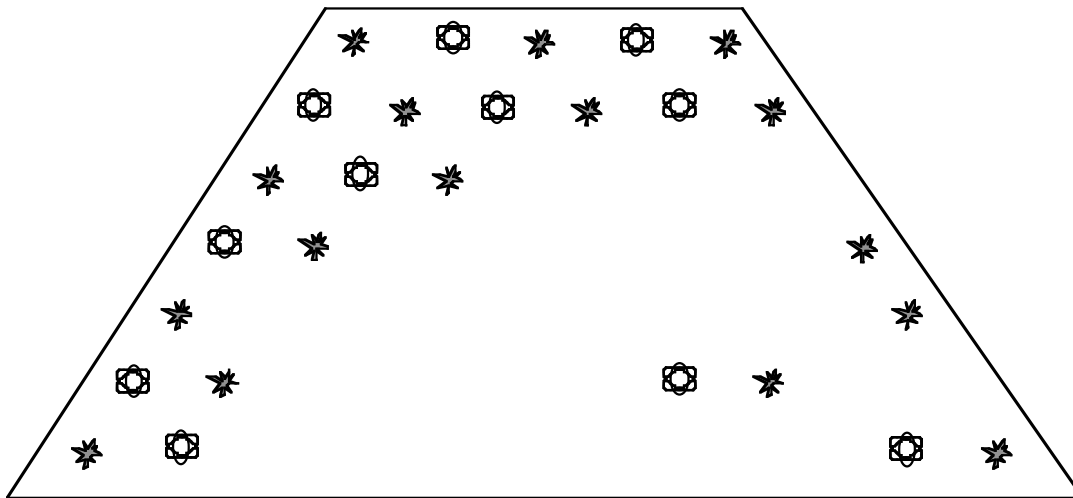
Niveaux : 3, 4

Origine : Lodi

3. LE POTAGER DE GRAND-PERE (Cat. 3, 4)

Grand-père a planté des salades et des choux dans tout son jardin potager, représenté ici :

Le jardin de Grand-père



Sur la première ligne, en haut de la figure, il a planté 3 choux et 2 salades.

Sur la deuxième ligne, il a pu placer une salade de plus.

Sur la troisième ligne, il avait planté 4 choux et 3 salades.

Il avait continué ainsi, très régulièrement, jusqu'à la dernière ligne.

Mais, la nuit dernière, la famille Lièvre est passé par là et a mangé de nombreux légumes.

Combien les lièvres ont-ils mangé de salades ? Et combien de choux ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : disposition régulière d'objets, alignements
- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication

Analyse de la tâche

- Comprendre la disposition des plantes selon le texte ou le dessin : repérer les alignements et leurs régularités.
- Dessiner les plantes qui manquent, selon les régularités découvertes et les dénombrer : 15 salades et 14 choux.

Ou travailler dans le cadre arithmétique :

Calculer les nombres initiaux de plantes de chaque type : $2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 = 26$ salades et $3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 = 30$ choux ; puis dénombrer les plantes restantes de chaque type : 11 salades et 16 choux ; finalement, les soustraire aux nombres initiaux : pour les salades $26 - 11 = 15$, pour les choux : $30 - 16 = 14$.

Attribution des points

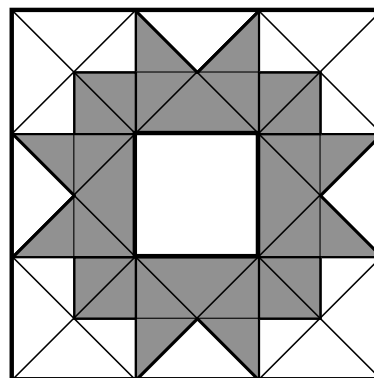
- 4 Réponses exactes (15 salades et 14 choux) avec explications (dessin précis ou calculs détaillés)
- 3 Réponses exactes sans explications
ou une erreur de comptage ou de calcul avec explications complètes
- 2 Une des deux réponses exacte avec explications
ou les deux réponses erronées dues soit à une erreur de calcul soit à une imprécision du dessin
- 1 Une seule réponse correcte, sans explication
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Adaptation d'anciens problèmes du RMT par C.I. (14F1 Les bons chocolats ; 6.I.2 Le potager de grand-mère, 12.F.2 Pavage)

4. LA ROSACE DE JULIE (I) (Cat. 3, 4)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.



Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris ... ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : décomposition-recomposition de formes
- Grandeurs : unité de mesure commune

Analyse de la tâche

- Tenir compte que le carré du milieu n'intervient pas dans la comparaison des aires.
- Comprendre que la surface blanche à couvrir est composée de plusieurs surfaces qui n'ont pas la même « aire »
- Comprendre qu'il est possible de comparer des aires sans les mesurer ou les calculer avec des unités conventionnelles, mais qu'il est nécessaire d'utiliser une unité de mesure commune ou de comparer les aires, partie par partie (grands et petits triangles ou carrés)
- Déterminer l'unité de mesure commune (un carré ou un petit triangle) ; compter le nombre de carrés (16) ou de petits triangles (32) dans chacune des deux parties à colorier ; comparer ces deux nombres et reconnaître l'égalité des aires à couvrir.

Attribution des points

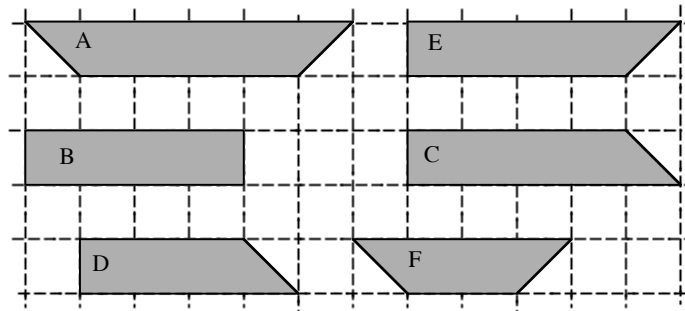
- 4 Solution complète (égalité des aires, autant de peinture grise que de blanche, ...) avec explications correctes et/ou pavage avec une unité commune
- 3 Solution correcte, avec explications incomplètes
- 2 Solution correcte sans explication
ou erreur de comptage mais explication correcte
ou prise en compte du miroir avec réponse cohérente « plus de blanc » et explications correctes
- 1 Début de recherche cohérente
- 0 Incompréhension du problème, ou erreur « plus de gris (28) que de blanc (20) » qui ne compte que les parties sans tenir compte de leur grandeur.

Niveau : 3, 4

Origine : Belgique

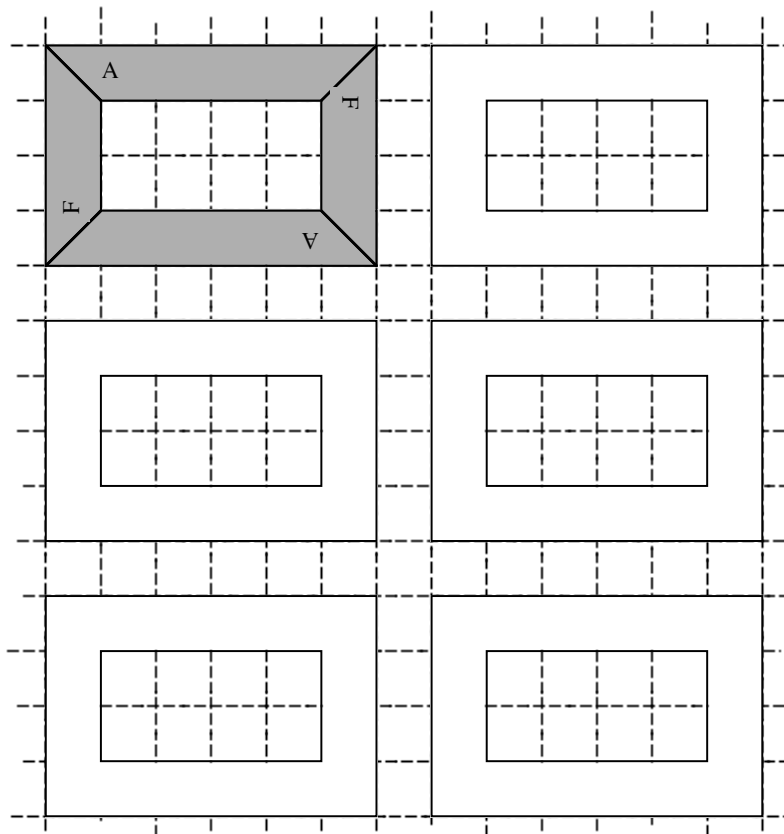
5. RUBAN ADHESIF (Cat. 3, 4, 5)

Dans un ruban de papier adhésif, Jacques a découpé plusieurs bandes, de 6 modèles différents : A, B, C, D, E et F :



Il a recouvert le cadre d'un tableau en y collant 4 bandes : 2 du modèle A et 2 du modèle F qui ne se superposent pas.

Jacques se demande s'il aurait pu recouvrir le cadre de manière différente.



Trouvez toutes les manières de recouvrir le cadre, différentes de celle de Jacques, avec quatre bandes, sans que les bandes se superposent.

Dessinez vos solutions, toutes différentes, sur les modèles préparés en blanc, en notant le nom des modèles utilisés.

Attention : les bandes adhésives ne se collent que sur une face, on doit toujours voir la lettre

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

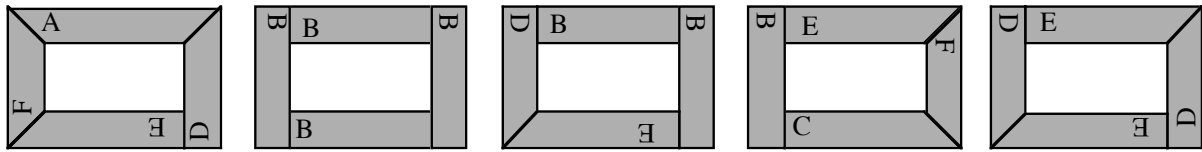
- Géométrie : décomposition et composition d'une figure, isométries

Analyse de la tâche

- Comprendre que les bandes choisies ne doivent pas se superposer, mais qu'elles peuvent s'orienter et se déplacer par rotations et translations.
- Découper des bandes et essayer de les placer, ou chercher à les dessiner sur les cadres.

Au cours de ces essais, il faut prendre conscience, que les bandes C, D et E n'ont pas d'axe de symétrie et qu'il ne faut pas les confondre avec des formes symétriques par rapport à un axe. Il faut aussi tenir compte des « longueurs » des bandes (A : 6 et 4 carrés, E et C : 5 et 4, B : 4 et 4, D : 4 et 3 et F : 4 et 2.)

- Découvrir les cinq autres solutions : (A, D, E, F), (B, B, B, B), (B, B, D, E), (B, C, E, F) et (E, D, E, D) et éliminer celles qui ont une pièce retournée (C, D, ou E)



Attribution des points

- 4 Réponse complète (les cinq dispositions trouvées, dessinées, avec l'indication des modèles)
- 3 Réponse avec un oubli (une des solutions non trouvée) ou une « erreur » qui peut être un retournement de C, D ou E ; ou une répétition d'une même solution ; ou encore avec un dessin très confus ne permettant pas de reconnaître les modèles
- 2 Réponse avec deux oublis ou « erreurs »
- 1 Réponse avec trois ou quatre oublis ou erreurs
- 0 Incompréhension du problème

Degrés : 3, 4, 5

Origine : Sassari

6. NOMBRES REPETES (I) (Cat. 4, 5)

Dans la table de multiplication « des nombres qui parlent », le 36 et le 40 ont déjà trouvé leurs places.

Le nombre 40 dit au nombre 36 : *Tu n'es que trois fois dans la table de multiplication des nombres de 1 à 10. Moi, j'y suis quatre fois et je vau 4 de plus que toi.*

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4									36	40
5								40		
6						36				
7										
8					40					
9				36						
10				40						

Quels sont les nombres qui pourront dire la même phrase à un autre lorsque la table sera complétée ?

Indiquez tous les nombres qui sont quatre fois dans la table et qui valent 4 de plus qu'un nombre qui n'y est que trois fois.

Expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que le tableau est fait pour contenir les produits de 1×1 à 10×10 et qu'il s'agit de la « table de multiplication » sous une forme différente de l'inventaire des « produits à mémoriser » (livrets, ...)
- Lire les consignes et les confronter aux exemples donnés en tenant compte des trois exigences : figurer quatre fois, valoir 4 de plus que l'autre nombre, qui doit figurer 3 fois.
- S'apercevoir que la table est symétrique par rapport à sa diagonale principale, c'est-à-dire que deux cases symétriques contiennent le même nombre (en raison de la commutativité de l'opération) et que les cases sur la diagonale sont symétriques d'elles-mêmes, ce qui signifie que les nombres qui s'y trouvent apparaissent un nombre impair de fois et limite ainsi la recherche aux dix nombres 1, 4, 9, ... 100, dont quatre seulement figurent trois fois : 4, 9, 16, 36.
- Examiner ensuite les quatre nombres qui valent 4 de plus : 8, 13, 20 et 40 et constater que, trois seulement sont quatre fois dans la table : 8, 20 et 40.

Ou : partir des nombres qui figurent quatre fois dans la table : 6, 10, 12, 18, 20, 24, 30 et 40 et vérifier si les nombres qui valent 4 de moins y figurent trois fois.

Ou : compléter entièrement la table et vérifier cas par cas si les trois conditions sont remplies.

Attribution des points

- 4 Réponse complète, (les nombres 8, 20 et 40) avec explications ou emplacements des nombres concernés dans la table : 8 et 4, 20 et 16, et faisant comprendre qu'il n'y a que ceux-là.
- 3 Réponse complète, sans explications
- 2 Réponse incomplète, (un seul des deux nombres 8 et 20) avec explication ou les deux nombres et un « intrus » (un autre nombre ne respectant que deux des trois conditions)

-
- 1 Réponse incomplète (un seul des deux nombres 8 et 20) sans explication
ou réponse avec un seul nombre correct et un ou plusieurs intrus ou les deux nombres avec plusieurs intrus
- 0 Incompréhension du problème

Niveau : 4, 5

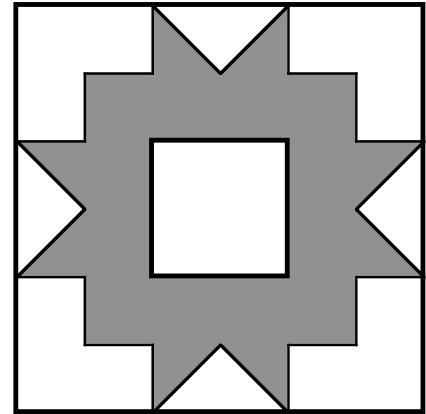
Origine : C.I

7. LA ROSACE DE JULIE (II) (Cat. 5, 6)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris ... ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



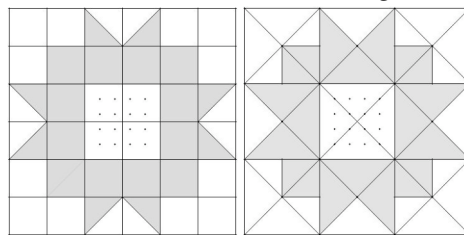
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

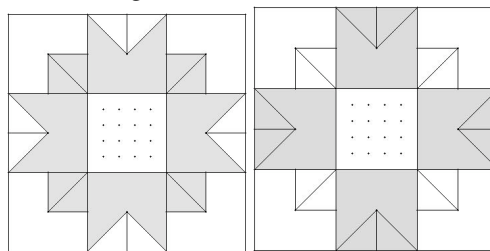
- Géométrie : décomposition-recomposition de formes
- Grandeurs : unité de mesure commune

Analyse de la tâche

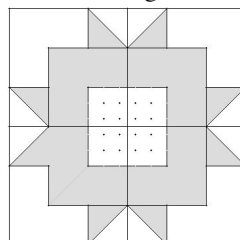
- Comprendre que le carré du milieu n'intervient pas dans la comparaison des aires.
- Comprendre que la surface blanche à couvrir peut être décomposée en plusieurs surfaces.
- Comprendre qu'il est possible de comparer des aires sans les mesurer ou les calculer avec des unités conventionnelles.
- Voir des décompositions possibles de chaque figure en ajoutant des traits dans le carré : déterminer l'unité de mesure commune (un carré ou un triangle) ; compter le nombre de carrés (16) ou de triangles (16) dans chacune des deux parties à colorier ; comparer ces deux nombres et reconnaître l'égalité des aires à couvrir.



- Voir qu'il est possible d'ajouter des lignes dans la partie grisée pour obtenir des carrés ; réaliser l'appariement géométrique entre ces quatre carrés et les quatre triangles clairs ; huit plus grands carrés à colorier apparaissent alors, quatre blancs, quatre gris ; constater l'égalité des aires.



- Tracer les médianes du grand carré ; prolonger les lignes intérieures pour faire apparaître des formes identiques aux quatre formes claires de coin ; réaliser des appariements géométriques entre ces formes et réaliser des appariements entre les triangles blancs et les triangles gris ; constater l'égalité des aires.



Attribution des points

- 4 Solution complète (égalité des aires, autant de peinture grise que de blanche, ...) avec explications correctes, par exemple avec le dessin des décompositions prises en compte
- 3 Solution correcte, avec explications incomplètes ou dessin peu clair
- 2 Solution correcte sans explication
ou erreur de comptage mais explication correcte
ou prise en compte du miroir avec réponse cohérente « plus de blanc » et explications correctes
- 1 Début de recherche cohérente
- 0 Incompréhension du problème, ou réponse « autant de blanc que de gris » fondée sur un comptage qui ne tient pas compte de la grandeur des pièces.

Niveau : 5, 6

Origine : Belgique

8. LES CRAYONS DU 15^E RMT (Cat. 5, 6)

Les organisateurs ont décidé d'offrir un crayon à tous les participants du 15^e RMT.

À la fabrique de crayons, un employé est chargé de mettre le logo « 15^e RMT, 2007 » sur chaque crayon.

Avec 10 crayons, il remplit des boîtes sur lesquelles il met aussi le logo « 15^e RMT, 2007 ».

Lorsqu'il a rempli dix boîtes, il en fait un paquet, sur lequel il marque de nouveau le logo « 15^e RMT, 2007 ».

Finalement, avec 10 paquets, il remplit un carton sur lequel il marque encore le logo « 15^e RMT, 2007 ».

Aujourd'hui, l'employé a préparé les crayons commandés par la section de Transalpie. Il a compté que, pour cette section, il a dû mettre 2007 logos « 15^e RMT, 2007 ».

Combien de crayons la section de Transalpie a-t-elle commandés ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération, les quatre opérations

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé et comprendre qu'on se trouve dans une situation de numération décimale : une boîte représente une dizaine, un paquet représente une centaine et un carton un millier.
- Comprendre que le nombre de logos est supérieur au nombre de crayons car ils sont mis aussi sur les boîtes, les paquets et les cartons et trouver les correspondances suivantes :
pour 10 crayons (une dizaine) il y a 11 logos, avec celui de la boîte
pour 100 crayons (une centaine), il y a 111 logos, avec celui du paquet
pour 1000 crayons (un millier), il faut 1111 logos, avec celui du carton.
- Comprendre que, deux cartons exigeraient 2222 logos et que, par conséquent, il n'y a pas deux cartons entiers pour 2007 logos, mais un carton entier et un reste de $2007 - 1111 = 896$ logos.
- Déterminer le nombre de paquets (111) dans 896 et arriver à 8 paquets et $896 - 888 = 8$ logos restants.
- En conclure que la section de Transalpie a commandé l'équivalent de 1 carton, 8 paquets et 8 crayons, c'est à-dire 1808 crayons.

Ou : procéder par essais et approximations en considérant qu'il y a moins de 2007 crayons (logos pour les boîtes, paquets, cartons) Supposer par exemple qu'il y en a 1800, alors il faut : $1800 + 180 + 18 + 1 = 1999$ logos, ce qui ne suffit pas. Essayer alors avec, par exemple, 1810 : $1810 + 181 + 18 + 1 = 2010$, et réduire le nombre de crayons pour trouver finalement qu'il y en a 1808 : $1808 + 180 + 18 + 1 = 2007$.

Attribution des points

- 4 Réponse « 1808 » avec justifications
- 3 Réponse « 1808 » sans explications
- 2 Réponse avec un oubli : logos sur les cartons qui amène à 1809 crayons, ou sur les paquets – 1824 crayons) ou réponse erronée due à une faute de calcul, avec raisonnement correct
- 1 Réponse avec deux oublis : logos sur les paquets et le carton qui amène à 1825 crayons ou début de recherche cohérente
- 0 Réponse « 2007 » ou incompréhension du problème

Niveau : 5, 6

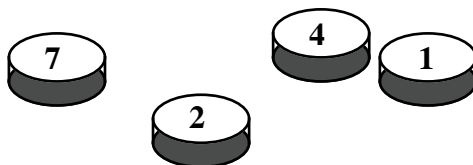
Origine : C.I.

9. LES JETONS DE FRANÇOISE (Cat. 5, 6)

Françoise a quatre jetons.

Elle observe que, sur chacune des huit faces est écrit un nombre différent, de 1 à 8.

Elle lance ses quatre jetons une première fois et elle voit apparaître le 7, le 2, le 4 et le 1, comme sur la figure ci-dessous :



Elle lance encore ses jetons une deuxième fois et elle obtient le 6, le 4, le 5 et le 2 ;

puis une troisième fois, elle obtient le 8, le 2, le 6 et le 5.

Enfin elle les jette une quatrième fois et obtient le 7, le 4, le 3 et le 5.

Quels sont les nombres qui figurent sur chacun des jetons, l'un sur une face et l'autre sur la face opposée ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique et raisonnement : combinatoire

Analyse de la tâche

- Remarquer le fait qu'il y a 8 faces de jetons portant chacune un des nombres de 1 à 8.
- Comprendre qu'à un nombre d'une face ne peut être associé qu'un des autres nombres
- Pour chaque nombre, établir l'inventaire des autres nombres qui peuvent être associés, en fonction des tirages indiqués. Par exemple, le 7 ne peut pas avoir 2, 4 et 1 d'après le premier tirage (7241), ni 3 et 5 d'après le 4^e tirage (7435) et qu'il ne peut donc être associé qu'à 6 ou 8.

On aura ainsi : pour 1 : 3, 5, 6 et 8 pour 2 : 3 pour 3 : 1, 2, 6 et 8 pour 4 : 8
5 : 1 pour 6 : 1, 3 et 7 pour 7 : 6 et 8 pour 8 : 1, 3, 4 et 7

Cet inventaire peut aussi être établi au moyen d'un tableau dans lequel les nombres apparus sont indiqués lancer par lancer.

- Confronter les résultats et voir que, après les couples 1 / 5 et 2 / 3 et 4 / 8, il ne reste plus qu'à associer 6 / 7.

Ou : trouver les associations par essais successifs, mais sans pouvoir assurer qu'il n'y a qu'une possibilité.

Ou : fixer l'attention sur 4 et 2 qui apparaissent dans trois des quatre lancers et, selon la confrontation avec les nombres sortis, trouver que 8 et 3 doivent être disposés respectivement sur les faces opposées à 4 et 2. Pour les nombres 1, 5, 6, 7, selon le 1^e et le 4^e lancer, observer que le 7 ne peut être qu'à l'opposé du 6 et, par conséquent le 1 à l'opposé du 5.

Attribution des points

- 4 Les quatre associations correctes 1 / 5 ; 2 / 3 ; 4 / 8, 6 / 7 obtenues par une méthode logique clairement expliquée
- 3 Les quatre associations correctes 1 / 5 ; 2 / 3 ; 4 / 8, 6 / 7 obtenues avec explications du genre « on a essayé », sans autre validation
- 2 Les quatre associations correctes, sans aucune explication
ou : une erreur (deux associations correctes et une interversion dans les deux autres), avec explications claires de la méthode
- 1 Début de raisonnement cohérent, mais ne conduisant qu'à une association correcte
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Canton Ticino

10. MACHINE A CALCULER 😊 (Cat. 5, 6, 7)

Sophie possède une sorte de machine à calculer munie d'une touche 😊 .

Quand Sophie tape 5 puis 😊 , sa machine affiche : 25

Quand Sophie tape 7 puis 😊 , sa machine affiche : 31

Quand Sophie tape 10 puis 😊 , sa machine affiche : 40

Quand Sophie tape 9 puis 😊 , que pourrait afficher sa machine ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les opérations, calcul réfléchi
- Approche intuitive de la notion de fonction

Analyse de la tâche

- Comprendre que la touche « smile » fait correspondre une « image » à tout nombre que l'on « entre » dans la machine.
- Constater que, à l'entrée, de 5 à 7 on augmente de 2 alors que, à la sortie l'augmentation de 25 à 31 est de 6. Faire l'hypothèse que chaque fois qu'on augment de 1 le nombre de l'entrée, la machine augmente de 3 le nombre affiché. L'image de 9 serait alors 37 et l'hypothèse serait vérifiée par l'image de 10 qui est 40.

Ou : procéder par un tableau de nombre à compléter et y chercher des régularités, en particulier celle évoquée précédemment.

entrées :	5	6	7	8	9	10
images	25		31			40

Dans ce cas, il suffit de compléter la suite arithmétique 25 ; 28 ; 31 ; 34 ; 37 ; 40 (en vérifiant le 31 au passage et en déterminant le 37 comme image de 9).

Ou : d'un point de vue « fonctionnel », chercher des relations directes entre l'entrée et la sortie : envisager une multiplication, ou une addition, ou une élévation au carré et se rendre compte qu'il faut orienter ses recherches vers une composition de deux « fonctions simples », par exemple d'une multiplication et d'une addition.

La multiplication par 4, suggérée par la correspondance 10 → 40 montre qu'il faudrait de « petites corrections » pour 5 ($4 \times 5 + 5 = 25$) et 7 ($4 \times 7 + 3 = 31$). Une multiplication par 3 fait correspondre 3, 7 et 10 à 15, 21 et 30 qui valent 10 de moins que les images respectives issues de la machine. La « machine à multiplier par 3 puis ajouter 10 » (fonction affine $x \rightarrow 3x + 10$) est donc une hypothèse à accepter pour les trois couples donnés. Il en existe une infinité d'autres d'un point de vue mathématique, mais celle-ci paraît la plus disponible pour des élèves de l'école primaire.

- L'hypothèse étant acceptée, il suffit de calculer l'image de 9 par la « machine à multiplier par 3 et ajouter 10 », c'est-à-dire $3 \times 9 + 10 = 37$

Ou, pour les élèves qui ont déjà rencontré des représentations graphiques, utiliser le fait que les trois couples (5 ; 25), (7 ; 31) et (10 ; 40) sont représentés par des points alignés.

Attribution des points

- 4 Réponse exacte (37) avec explicitation de la règle trouvée et vérification sur les trois exemples donnés
- 3 Réponse exacte avec explications incomplètes (par exemple sans les vérifications des trois exemples donnés)
- 2 Réponse exacte sans aucune explication
ou émission d'une hypothèse, confrontation avec les autres valeurs numériques mais sans calculer l'image de 9
- 1 Résultats comme 45 ou 36 ; avec une conjecture émise, explicitée mais non pas vérifiée pour les autres nombres donnés, et appliquée directement au nombre « 9 »
- 0 incompréhension du problème, absence de résultat

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Châteauroux

11. LE CHAMP AGRANDI (Cat. 5, 6, 7)

Le père Julien possède un champ carré entouré d'une clôture. Son voisin accepte de lui vendre un peu de terrain pour l'agrandir en un carré ayant des côtés d'un mètre de plus. La surface de son champ augmente ainsi de 41 m^2 .

Quelle était la longueur des côtés de son ancien champ ?

Maintenant que le terrain est plus grand, la clôture précédente n'est plus suffisante : combien de mètres de clôture manquent-ils ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

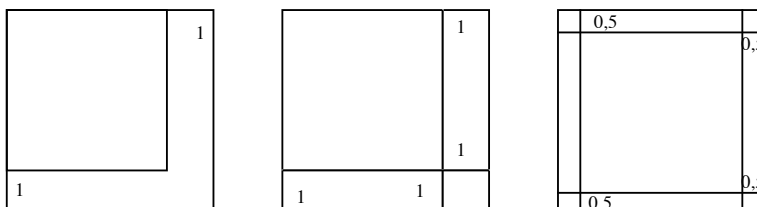
Domaine de connaissances

- Géométrie : périmètre et aire d'un carré, aire du rectangle
- Arithmétique (addition, multiplication)

1

Analyse de la tâche

- Représenter la situation par un croquis de ce genre :



- Constaté que la clôture doit être allongée de 4 fois 1 mètre

Ou : se rappeler que le périmètre d'un carré vaut 4 fois la longueur d'un côté. Et si le côté augmente de 1 mètre, le périmètre va augmenter de 4 mètres.

- Décomposer la partie gagnée en deux rectangles et un petit carré d'un mètre de côté.

Les deux rectangles ont pour aire ensemble $41 - 1 = 40 \text{ m}^2$.

Ayant même longueur (le côté de l'ancien champ) et même largeur (1 m), ils ont même aire.

Chacun fait donc 20 m^2 .

Les côtés de l'ancien champ mesuraient donc 20 m.

Ou : dresser un inventaire organisé en faisant varier le côté, pour déterminer la solution correspondante :

mesure ancien côté (en m)	16	...	20	...	21
mesure nouveau côté (en m)	17	...	21	...	22
différence des aires (en m^2)	$289 - 256 = 33$...	$441 - 400 = 41$...	$484 - 441 = 43$

et s'apercevoir que les différences des deux carrés augmentent de 2 en 2, et qu'il n'y a qu'une solution à retenir.

Attribution des points

- 4 Solution correcte : (20 m et 4m), avec explications
- 3 Solution correcte, (20 m et 4m) avec explications incomplètes
- 2 Solution correcte (20 m et 4m) sans aucune explication ni justification
ou solution avec une erreur de calcul, mais avec explications
ou réponse correcte à la première question et réponse 24 m ($1+20+1+1+20+1$) à la deuxième
- 1 Début de recherche cohérente, réponse juste à une des deux questions
- 0 Incompréhension du problème ou réponses entièrement fausses

Niveau : 5, 6, 7

Origine : Franche-Comté

12. NOMBRES REPETES (II) (Cat. 6, 7)

Julie a constaté que, dans sa table de multiplication des nombres de 1×1 à 10×10 , certains nombres ne figurent qu'une fois, par exemple le 1, le 49, le 100. D'autres nombres sont deux fois dans la table, par exemple le 2, le 3, le 14 ; d'autres y sont trois fois, par exemple le 4, le 9, le 16 et d'autres encore sont quatre fois dans la table, par exemple le 6, le 20. Mais il n'y a pas de nombres qui figurent plus de quatre fois dans sa table.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4		6			9			
2	2	4	6				14	16		20		
3	3	6	9									
4	4			16	20							
5				20								
6	6											
7		14					49					
8		16										
9	9											
10		20										
11												
12												

La table de Julie, de 1×1 à 10×10 (carré en traits épais)
et la table de sa grand-mère, de 1×1 à 12×12

La grand-mère de Julie, lui dit que, lorsqu'elle était jeune, elle a appris la table de 1×1 à 12×12 où il y a des nombres qui apparaissent plus de quatre fois.

Notez en rouge tous les nombres qui figurent cinq fois dans la table de la grand-mère de Julie, s'il y en a.

Notez en bleu ceux qui apparaissent six fois, dans la table de grand-mère, s'il y en a.

Notez en vert ceux qui apparaissent deux fois dans la table de Julie et quatre fois dans la table de grand-mère, s'il y en a.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, multiples et diviseurs, commutativité

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que les deux tableaux inclus l'un dans l'autre contiennent les produits de 1×1 à 10×10 ou de 1×1 à 12×12 .
- Comprendre la véracité du texte qui décrit la table de Julie et la présence de nombres apparaissant une, deux, trois ou quatre fois.
- Constatez que les nombres des cases de la diagonale apparaissent un nombre impair de fois : une fois sur la diagonale et une fois dans chacune des deux parties symétriques, de part et d'autre de la diagonale.
- Chercher en conséquence des nombres apparaissant 5 fois parmi ceux de la diagonale et trouver le « 36 »
- Trouver les nombres qui apparaissent six fois : le 12 et le 24.
- Découvrir que le 48, le 60 et le 72 apparaissent quatre fois dans la table de 10×10 alors qu'ils ne figuraient que deux fois dans celle de 12×12

Ou : compléter entièrement une autre table de multiplication et ne recopier que les nombres demandés, après un contrôle rigoureux.

Voici la solution attendue : 5 nombres en rouge (cinq fois 36), 12 nombres en bleu (six fois 12 et 24) et 12 nombres en vert (quatre fois le 48, le 60 et le 72).

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4		6			9			12
2	2	4	6			12	14	16		20		24
3	3	6	9	12				24				36
4	4		12	16	20	24			36			48
5				20								60
6	6	12		24		36		48		60		72
7		14					49					
8		16	24			48			72			
9	9			36				72				
10		20				60						
11												
12	12	24	36	48	60	72						

Attribution des points

4 Réponse complète, (voir ci-dessus)

3 Une ou deux erreurs seulement : un nombre n'est pas dans la catégorie (correcte), tous ou quelques nombres en vert inférieurs ou égaux à 20 sont notés, un nombre en vert n'est noté que trois fois au lieu de quatre,

2 De trois à cinq erreurs

1 De six à dix erreurs

0 Incompréhension du problème ou plus de dix erreurs

Niveau : 6, 7

Origine : C.I.

13. LES TIRELIRES DE ROBERT (Cat. 6, 7, 8)

Pour son anniversaire, Robert a reçu trois tirelires contenant chacune un nombre différent d'euros. Le produit de ces trois nombres est 30.

Durant l'année, Robert ne touche pas à l'argent contenu dans ses tirelires, mais au contraire, il ajoute encore dans chacune des trois tirelires le même nombre d'euros.

Lors de son anniversaire suivant, il calcule que le produit des nombres d'euros contenus dans les trois tirelires est 560.

Combien d'euros contenait chacune des trois tirelires au moment où Robert les a reçues.

Y a-t-il plusieurs solutions ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication de nombres naturels, décomposition en facteurs, commutativité

Analyse de la tâche

- Décomposer 30 en trois facteurs différents et constater, par une recherche organisée, qu'il n'y a que quatre décompositions $1 \times 2 \times 15$ – $1 \times 3 \times 10$ – $1 \times 5 \times 6$ – $2 \times 3 \times 5$. Ajouter un même nombre à chacun des facteurs de chaque décomposition pour trouver si les nouveaux facteurs donnent un produit de 560.

Par exemple $1 \times 2 \times 15$ devient $(1+1) \times (2+1) \times (15+1) = 2 \times 3 \times 16 = 96$ puis $(1+2) \times (2+2) \times (15+2) = 3 \times 4 \times 17 = 204$, puis $4 \times 5 \times 18 = 360$ puis $5 \times 6 \times 19 = 570$, qui dépasse 560.

La décomposition cherchée est $2 \times 3 \times 5$ qui devient $3 \times 4 \times 6 = 72$, puis $4 \times 5 \times 7 = 120$, puis $5 \times 6 \times 8 = 240$, puis $6 \times 7 \times 9 = 378$ et finalement puis $(2+5) \times (3+5) \times (5+5) = 7 \times 8 \times 10 = 560$. Robert a donc ajouté 5 euros aux contenus initiaux qui étaient de 2, 3 et 5 euros.

- Vérifier que les autres décompositions initiales ne permettent pas d'atteindre 560 et en déduire que la solution du problème est unique

Ou : partir des décompositions de 560 en produits de trois facteurs différents. Vu que $560 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$, on peut éliminer les facteurs 1 ou 2 et les facteurs supérieurs à 15 vu l'impossibilité de revenir à des facteurs initiaux positifs et dont le produit sera 30. Il reste à examiner $7 \times 10 \times 8$, $14 \times 10 \times 4$. (C'est le premier de ces deux cas qui permet de revenir à une décomposition de 30 en trois facteurs : $2 \times 3 \times 5$)

Ou trouver au hasard les trois nombres, mais sans pouvoir se prononcer sur l'unicité.

Attribution des points

- 4 Réponse exacte (une seule solution : 2, 3, et 5) avec explications (les décompositions explicites de 30 ou 560) et la vérification que la solution est unique
- 3 Réponse exacte avec explications incomplètes sans certitude de l'unicité ou sans vérifications
- 2 Réponse exacte (2, 3, 5) sans autres explications
ou procédure explicite correcte mais avec erreur de calcul
- 1 Début de recherche permettant de voir que des triplets de nombres ont été envisagés, mais sans aboutir
- 0 Incompréhension du problème.

Degrés : 6, 7, 8

Origine : Cagliari (CRSEM)

14. LE DROGUISTE (Cat. 7, 8, 9)

Pascal, le droguiste, a confectionné des sachets de safran de trois grandeurs différentes, mais il a oublié d'écrire sur chaque sachet le poids de la substance qu'il contient.

Il sait qu'avec 14 grammes de safran, il peut confectionner :

- 12 petits sachets et 4 grands, ou
- 4 grands et 4 moyens, ou
- 5 moyens, 5 petits et 2 grands.

Quel est le poids de chacun des sachets.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : opérations, proportionnalité, équivalence
- Algèbre : système d'équations

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que, puisque chaque groupe de sachets a un poids de 14 grammes, ils sont égaux deux à deux (en poids) et qu'on peut donc tirer profit des égalités entre deux groupes.
- Observer que les deux premiers groupes de sachets ont le même nombre de grands sachets et qu'on peut donc procéder facilement, par « soustraction » de 4 grands dans chacun des groupes pour se convaincre que 12 petits sachets correspondent à 3 moyens puis, par « division par 3 », que 3 petits correspondent à 1 moyen.
- En comparant le deuxième et le troisième groupe et en « soustrayant » de chacun d'eux 4 moyens et 2 grands, on arrive à « 2 grands équivalent à 1 moyen et 5 petits », puis, par substitution de 1 moyen par 3 petits (équivalence précédente), on arrive à « 2 grands équivalent à 8 petits » puis « 1 grand équivaut à 4 petits ».
- Exprimer chaque groupe au moyen d'un même sachet-unité, par substitutions, pour voir que chacun d'eux est équivalent à 28 petits, (ou 7 grands) et en déduire le poids de chaque type de sachet, en grammes : Pour les petits, $14 : 28 = 0,5$; pour les grands $14 : 7 = 2$ et pour les moyens $3 \times 0,5 = 1,5$.

Ou : Émettre des hypothèses sur les poids des sachets convenant à un groupe et les vérifier sur les autres groupes. Par exemple, choisir pour le deuxième groupe $g = 2,5$ et $m = 1$ (car $4 \times 2,5 + 4 \times 1 = 14$), tirer la valeur de p du premier groupe $12p = 14 - 10 = 4 \Rightarrow p = 1/3$, vérifier que le troisième groupe a un poids différent de 14, puis faire un autre choix. Avec l'hypothèse $p = 2$ et $m = 1,5$ on trouve $p = 0,5$ qui satisfait la relation du troisième groupe, mais sans assurer l'unicité de la solution.

Ou : procéder algébriquement par un système de trois équations et trois inconnues à résoudre par comparaison ou substitution.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (0,5g, 1,5g, 2g) avec explications claires et complètes (démarche par équivalences et substitutions conduisant à une seule solution)
- 3 Réponse correcte obtenue par essais et une seule vérification sans recherche d'autres solutions ou réponse correcte avec explications partielles
- 2 Réponse correcte sans explications ou explications claires mais avec une erreur de calcul
- 1 Début de raisonnement (découverte d'une équivalence, ...)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9

Origine: Lodi

15. LE TROC (Cat. 7, 8, 9, 10)

Sur la petite île de Bellemer les enfants de la région récoltent des coquillages qu'ils échangent au kiosque de la plage. Voici les tarifs pour cinq objets demandés par les enfants :

- 36 coquillages pour une glace,
- 40 coquillages pour un sandwich,
- 24 coquillages pour un jus de fruit,
- 100 coquillages pour un masque de plongée,
- 60 coquillages pour un cerf-volant.

Les enfants peuvent aussi échanger les oursins qu'ils prennent sous l'eau dans les rochers pour obtenir les cinq objets précédents. Voici les tarifs :

- 45 oursins pour l'un des cinq objets,
- 27 oursins pour un autre objet,
- 75 oursins pour un autre objet encore.

Combien faudra-t-il d'oursins pour chacun des deux autres objets qui restent ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre que les « prix » des objets peuvent s'exprimer en coquillages et en oursins et qu'il s'agit de découvrir la règle d'échanges « coquillages – oursins » à partir des données.
- Ordonner les deux séries de prix 24 36 40 60 100 et 27 45 75 et imaginer lesquels peuvent être en correspondance et où se situent les deux prix manquants « ? » :

$$24 \ 36 \ 40 \ 60 \ 100 \ \text{ou} \ 24 \ 36 \ 40 \ 60 \ 100 \ \text{ou} \ 27 \ 36 \ 40 \ 60 \ 100 \ \text{etc.}$$

$$27 \ ? \ 45 \ 75 \ ? \ \text{ou} \ 27 \ 45 \ ? \ 75 \ ? \ \text{ou} \ ? \ ? \ 27 \ 45 \ 75$$
- Déterminer quelle est la bonne association en cherchant une règle « plausible » : il faut éliminer les différences et penser aux propriétés de la proportionnalité intuitives ou explicites. Parmi celles-ci il y a la règle du « produit » (le passage au double ou au triple ... dans une des suites doit être reproduit dans l'autre), la règle de « la somme » (si un nombre d'une suite est la somme de deux autres, on doit avoir la même correspondance dans l'autre suite) ou la propriété du « rapport » de proportionnalité (qui doit être le même pour chaque couple de nombres correspondants). (Avec ces données, la règle du « produit » n'est pas applicable, celle de la « somme » peut servir à la vérification. Le fait que les nombres de la première suite sont des multiples de 4 et ceux de la seconde des multiples de 3 peut aider à faire apparaître le rapport 3/4)

Ou essayer d'estimer puis calculer des rapports entre deux nombres supposés correspondants et de vérifier avec les autres. Par exemple le rapport 27/24 se retrouve en 45/40 mais ne convient pas pour 75/60 ni 75/100, ce qui peut conduire à la conclusion que les nombres de la deuxième suite sont plus petits que ceux de la première. Le rapport 75/100 est facilement repérable (3/4), se retrouve dans 45/60 et dans 27/36.

- Lorsque les correspondances sont déterminées :

$$\begin{array}{cccccc} 24 & 36 & 40 & 60 & 100 & \\ ? & 27 & ? & 45 & 75 & \end{array}$$

les deux prix manquants, en « oursins » se calculent à l'aide du rapport 3/4 ou de la règle de la « somme » :

$$3/4 \times 40 = 30, \ 3/4 \times 24 = 18 \ \text{ou} \ 40 + 60 = 100 \Rightarrow ? + 45 = 75, \ 24 + 36 = 60 \Rightarrow ? + 27 = 45,$$

ce qui conduit aux 18 et 30 oursins pour les deux objets manquants, le jus de fruit et le sandwich.

Attribution des points

- 4 Réponse « 18 et 30 oursins » avec la manière dont ces nombres ont été trouvés ou avec une vérification des rapports ou de la règle de la somme en précisant que 18 et 30 oursins correspondent respectivement à 24 et 40 coquillages.
- 3 Réponse « 18 et 30 oursins » avec explications incomplètes
- 2 Un des deux prix « 18 ou 30 oursins » avec explication ou vérification ou réponse « 18 et 30 oursins » sans aucune explication ou raisonnement correct explicite avec une erreur de calcul

-
- 1 Début de recherche, les deux suites ordonnées avec les correspondances, mais sans trouver les prix du jus de fruit et du sandwich
- 0 Incompréhension du problème

Niveau : 7, 8, 9, 10

Origine : Groupe de travail « proportionnalité »

16. DES TRUITES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Dans une pisciculture, on élève deux sortes de truites pour la consommation : des blanches et des saumonées.

Il y a deux bassins, A et B, dans lesquels un employé doit pêcher les truites demandées par un client. Mais il ne peut reconnaître le type d'une truite qu'après l'avoir attrapée.

- Dans le bassin A, il y a 60 truites blanches et 100 truites saumonées.

- Dans le bassin B, il y a 80 truites blanches et 140 truites saumonées.

Un client préfère les truites blanches, il en voudrait une.

Dans quel bassin l'employé doit-il pêcher pour avoir le plus de chances d'avoir une truite blanche du premier coup ?

Expliquez votre raisonnement

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Probabilités intuitives
- Arithmétique : proportionnalité, rapports

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il ne faut pas simplement comparer les nombres de truites blanche ($80 > 60$ et choisir le bassin B parce qu'elles y sont plus nombreuses) ou les nombres de truites saumonées ($140 > 100$ et choisir le bassin A car on risque moins d'y trouver des truites saumonées). L'abandon de cette conception devrait s'appuyer, par exemple, sur la constatation que, si on divise le bassin B en deux bassins de 40 truites blanches et 70 truites saumonées, les conclusions précédentes seraient inversées.
- Comprendre aussi qu'on ne peut pas se limiter à examiner les différences des nombres de truites au sein d'un même bassin (par exemple, choisir A car on y trouve 40 truites saumonées de plus que de blanches alors que la différence est de 60 dans le bassin B, favorisant les chances d'y prendre une truite saumonée), ni les variations du nombre de truites de chaque type d'un bassin à l'autre. Le rejet de ces conceptions peut, comme précédemment, s'appuyer sur des « partages » de bassins.

Comprendre qu'il faut considérer la quantité relative des truites blanches, par rapport à l'ensemble ou par rapport aux autres,

- Calculer des rapports comparables pour conclure qu'il faut choisir le bassin A, soit car la proportion de truites blanches parmi toutes y est $60/160 = 0,375$,
alors qu'elle est de $40/110 \approx 0,364$ dans B
soit car le rapport des truites blanches sur les saumonées est $60/100 = 0,6$ dans A,
alors qu'il est $40/70 \approx 0,57$ dans B.

Ou : comparer les rapports écrits sous forme de fractions, de dénominateurs ou de numérateurs communs, par exemple : $60/100 = 3/5 = 21/35 = 12/20$ et $80/140 = 4/7 = 20/35 = 12/21$

Attribution des points

- 4 Solution juste (le bassin A) avec explications du lien entre les rapports calculés et les chances de « gagner »
- 3 Solution juste (le bassin A) avec comparaisons entre des rapports et explications, mais sans parler des « chances de gagner »
- 2 Solution juste (le bassin A), avec comparaison de rapports, sans aucune autre explication ou avec explications confuses
- 1 Solution juste (le bassin A), reposant sur une comparaison erronée de différences des nombres de truites au sein d'un bassin ou des écarts entre un bassin et l'autre, avec cependant une explication de type probabiliste (on a plus de chances de ... car il y a plus de ...)
ou solution erronée (le bassin B) avec prise en compte de rapports mais due à une erreur de calcul
- 0 Solution juste (le bassin A) avec des justifications ne prenant en compte que la comparaison des nombres d'un seul type de truite. Incompréhension du problème ou réponse fausse.

Niveau : 7, 8, 9, 10

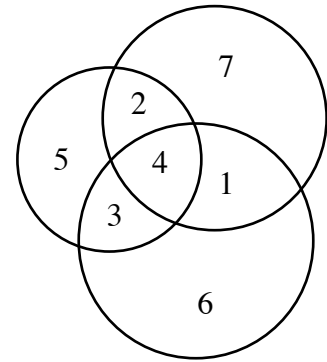
Origine : Franche-Comté

17. CERCLES ET NOMBRES (Cat. 8, 9, 10)

François a dessiné trois cercles qui déterminent 7 régions fermées du plan. Dans chacune de ces régions, il écrit un des nombres de 1 à 7, sans répétition, de manière à ce que la somme des nombres dans chacun des trois cercles soit la même.

Dans cet exemple, la somme des nombres dans chaque cercle est 14, mais elle pourrait être plus grande si on avait disposé les nombres autrement.

Mira dit à François qu'elle peut dessiner trois cercles qui déterminent 6 régions fermées, et placer dans chacune un des nombres de 1 à 6, sans répétition, de manière à ce que la somme des nombres dans chacun des trois cercles soit la même et la plus grande possible



Pouvez-vous faire comme Mira ? Dessinez votre solution et placez vos nombres.

Quelle somme obtenez-vous dans chacun des trois cercles ? Est-elle la plus grande possible ? Expliquez pourquoi.

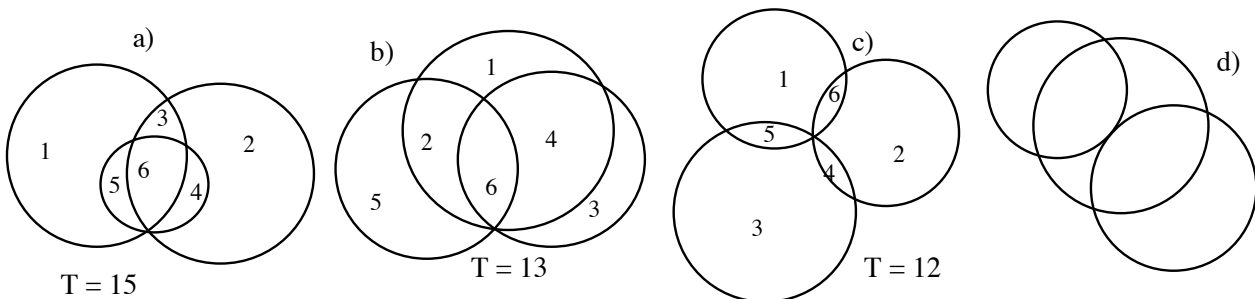
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : combinaisons d'addition
- Géométrie : intersection de cercles et régions fermées

Analyse de la tâche

- Chercher les différentes dispositions de trois cercles en fonction des régions fermées déterminées. Ce nombre de régions peut varier de 3 (cercles sans intersections) à 7 (disposition de l'énoncé). Se rendre compte que 6 régions peuvent être obtenues par une des quatre dispositions suivantes « topologiquement » différentes :
 - a) 1 région commune aux trois cercles, 3 régions communes à deux cercles et 2 régions n'appartenant qu'à un cercle
 - b) 1 région commune aux trois cercles, 2 régions communes à deux cercles et 3 régions n'appartenant qu'à un cercle
 - c) 0 région commune aux trois cercles, 3 régions communes à deux cercles et 3 régions n'appartenant qu'à un cercle
 - d) 0 région commune aux trois cercles, 2 régions communes à deux cercles et 4 régions n'appartenant qu'à un cercle



- Se rendre compte que la disposition d) ne permet pas d'obtenir la même somme dans chaque cercle.
- Observer qu'il y a dans chaque autre disposition un, deux ou trois cercles qui contiennent trois régions et que, par conséquent, la somme des nombres pour ces cercles ne peut être supérieure à 15 ($6 + 5 + 4$)
- Comprendre que pour obtenir une somme maximale, il faut tenter de placer le 6 dans la région commune aux trois cercles, en a) et b) pour qu'il apparaisse dans trois sommes, et dans une des régions communes à deux cercles dans c) pour qu'il apparaisse dans deux sommes.

Pour les autres nombres, il faudrait aussi s'inspirer de ce même principe selon lequel, pour obtenir les plus grandes sommes, il faut utiliser le plus souvent possible les nombres 4, 5 et 6

- Dans la disposition a), tenter de placer 6 dans la région commune aux trois cercles, puis 4 et 5 dans les deux régions communes à deux cercles, du cercle « central ». La somme de 15 s'obtient facilement dans les deux autres cercles en y plaçant les nombres 3 dans leur région commune, puis 2 et 1 dans les régions « extérieures ». (On peut obtenir une solution « symétrique » par permutation de 4 et 5, respectivement de 1 et 2).
- Dans la disposition b), après avoir placé 6 dans la région commune aux trois cercles, on se rend compte rapidement que la somme de 15 pour les trois cercles ne pourra pas être obtenu et que le maximum est 13.
- Dans la disposition c) le maximum s'obtient en plaçant 6, 5 et 4 dans les trois régions communes à deux cercles, mais la somme maximale n'est que 12.

Attribution des points

- 4 Solution maximale (15) avec justification sur les différentes dispositions des cercles et sur la manière d'y placer les nombres (le 6 dans les zones communes ou les différentes sommes possibles, ...)
- 3 Solution maximale (15) avec justification incomplète ou par essais successifs ou solution non maximale (13) selon la disposition b) ou (12) selon c) avec justification complète
- 2 Solution maximale (15) sans justification ou solution non maximales (13) ou (12) selon la disposition b) ou c) avec justification incomplète
- 1 Solution ne respectant pas l'égalité des sommes
- 0 Incompréhension du problème, ...

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Israël

18. LA FANFARE DE CARNAVAL (Cat. 8, 9, 10)

La fanfare du carnaval a fière allure, il y a plus de vingt-cinq rangs de trois musiciens, tous complets, derrière le directeur.

Après quelques centaines de mètres, un des musiciens doit s'arrêter car il a mal à un pied. Le directeur demande alors aux autres de se mettre par rangs de quatre, car, ainsi, tous les rangs seront complets.

Un peu plus tard, un deuxième musicien quitte le défilé car il meurt de soif. Le directeur s'aperçoit qu'il peut alors disposer ses musiciens par rangs de cinq, tous complets.

Encore plus tard, c'est un troisième musicien qui abandonne, sur défaillance. Le directeur demande aux musiciens qui restent de former des rangs de six, Tous les rangs sont de nouveau complets, mais il y en a moins de vingt-cinq maintenant.

Combien y avait-il de musiciens au début du défilé ?

Expliquez votre raisonnement et indiquez combien il y a de solutions.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : multiplication et division, multiples et diviseurs

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé et comprendre que, lorsqu'un musicien quitte le défilé, le rang dans lequel il était devient incomplet et qu'il faut donc modifier le nombre de personnes par rang pour que tous soient à nouveau complets.
- Comprendre que si les rangs de 3, puis 4, puis 5, et puis 6 sont tous complets, le nombre total de musiciens restants est successivement, un multiple de 3, de 4, de 5 et de 6 et que, simultanément, les séquences cherchées se composent de quatre nombres consécutifs, dans l'ordre décroissant.

Chercher d'abord des multiples de 3 supérieurs à 78 qui valent un de plus qu'un multiple de 4, (à la suite du départ du musicien qui a mal aux pieds), et en vérifiant si le nombre diminué de 1 est un multiple de 4 : 78 : non ; 81 : oui ; 84 : non ; 87 : non, 90 : non ; 93 : oui ; 96 : non, 99 : non, etc.

Constater ainsi que les différentes possibilités se retrouvent de 12 en 12 :

(81 ; 80 ... ; ...), (93 ; 92 ; ... ; ...), (105 ; 104 ; ... ; ...), (117 ; 116 ; ... ; ...), (129 ; 128 ; ... ; ...), (141 ; 140 ; ... ; ...), ...

- Parmi les séquences précédentes chercher celles dont les multiples de 4 valent un de plus qu'un multiple de 5 (à la suite du départ de celui qui meurt de soif) et constater qu'une seule convient, avec un multiple de 4 se terminant par 6 : ... (117 ; 116 ; 115 ; ...),
- Vérifier que le quatrième nombre de la séquence retenue est un multiple de 6.

Ou : comprendre que le nombre cherché doit être compris entre 78 (26×3) et 147 ($24 \times 6 + 3$). Puis répondre successivement aux autres conditions : les multiples de 3 moins 1 doivent être des multiples de 4, qui doivent devenir multiples de 5 lorsqu'on enlève 1, etc. On peut alors utiliser une stratégie du genre du crible d'Eratosthène : écrire tous les multiples de 3 possibles : 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 102, 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123, 126, 129, 132, 135, 138, 141, 144 ; de ces 23 multiples ne conserver que les 6 qui sont précédés d'un multiple de 4 (nombres impairs de la forme $4m + 1$) : 81, 93, 105, 117, 129, 141, puis ne conserver que ceux qui valent 2 de plus qu'un multiple de 5. Il n'y a plus qu'une possibilité : 117, qui, diminué de 3 donne un multiple de 3, pair, c'est-à-dire un multiple de 6.

Attribution des points

- 4 Réponse « 117 » avec justifications : séquence (117 ; 116 ; 115 ; 114), vérification de l'unicité
- 3 Réponse « 117 » avec explications incomplètes, sans vérification de l'unicité, ...
- 2 Réponse 57 ... et/ou 117 avec explications (sans contrôle des conditions sur le nombre de rangs)
- 1 Début de recherche cohérente
- 0 Incompréhension du problème

Niveau : 8, 9, 10

Origine : C.I.

19. FAMILLE NOMBREUSE (Cat. 8, 9, 10)

Albert et Béatrice viennent de se marier et souhaitent avoir trois enfants.

Albert désirerait au moins une fille et Béatrice au moins un garçon.

Un ami leur dit : dans notre petit village, seulement la moitié des couples qui ont eu trois enfants, ont eu un garçon et une fille. J'estime donc qu'il n'y a qu'une chance sur deux que vos souhaits se réalisent.

Que pensez-vous de l'affirmation de l'ami ?

Albert et Béatrice peuvent-ils espérer mieux ?

Expliquez et commentez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : fractions
- Combinatoire : approche de la notion de probabilité

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il faut vérifier l'affirmation « une chance sur deux », qui correspond bien au cas spécifique du village mais doit être examinée dans le cas général
- Déterminer les différentes compositions des familles de trois enfants : 3 garçons, 2 garçons et une fille, 1 garçon et deux filles, 3 filles, mais remarquer que ces quatre compositions n'ont pas autant de chances d'arriver les unes que les autres : par exemple, parmi les familles de 2 garçons et une fille, il faut distinguer 3 situations : f-g-g, g-f-g et g-g-f, alors que pour les familles n'ayant que des garçons, il n'y a qu'une possibilité : g-g-g.
- Dresser un inventaire de toutes les compositions possibles des familles de trois enfants, enfant par enfant, à l'aide d'un diagramme en arbre, d'un tableau ou d'une autre représentation. On obtient ainsi 8 situations ayant les mêmes chances de se produire, puisqu'on a autant de chances d'avoir une fille ou un garçon: f-f-f ; f-f-g ; f-g-f ; f-g-g ; g-f-f ; g-f-g ; g-g-f ; g-g-g et constater que dans 6 cas sur 8, la famille a au moins un garçon et au moins une fille.
- Considérer que la situation du village ne correspond pas à la distribution précédente et qu'elle est due au hasard, en attribuant le décalage aux dimensions réduites de l'échantillon.
- Conclure que l'expression « une chance sur deux » est inadéquate comme prévision et qu'elle devrait être remplacée par « 6 chances sur 8 » ou « 3 chances sur 4 » et que A. et B. peuvent « espérer mieux » vu que $6/8 > 1/2$

Attribution des points

- 4 Réponse correcte et complète (A et B peuvent « espérer mieux » ; la prévision « une chance sur deux » est due au fait que le village est trop petit pour en tirer cette généralisation ; il faudrait la remplacer par « 6 chances sur 8 » ou « 3 chances sur 4 » ...) avec une identification des 8 compositions et la remarque que $6/8 > 1/2$
- 3 Réponse correcte mais incomplète (où il manque la remarque que $6/8 > 1/2$ ou « le village est trop petit » ...)
- 2 Réponse très partielle du genre A et B peuvent espérer mieux ou « une chance sur deux » ne convient pas, avec inventaire mais sans argumentation
- 1 Réponse comme précédemment mais sans inventaire ni explications
ou erreur due à une analyse insuffisante des compositions de familles (inventaire en quatre catégories, sans tenir compte de l'ordre des enfants (A et B ne peuvent pas « espérer mieux » ; la prévision « une chance sur deux » est juste)
- 0 Incompréhension du problème

Degrés : 8, 9, 10

Origine : Milano

20. ARRET PIPI (Cat. 9, 10)

Sur une route de campagne, dans leur belle auto, M. et Mme Durand et leur fils Rémi suivent un gros camion qui roule très régulièrement à 60 km/h. Une grande ligne droite se présente et M. Durand peut enfin doubler et reprendre sa vitesse de croisière de 90 km/h.

Au même moment, Rémi demande que l'on s'arrête pendant au moins 5 minutes. M. Durand aimerait bien ne pas se faire redoubler par le poids lourd et voudrait savoir quelle distance minimum il leur faut parcourir à 90 km/h pour avoir au moins 5 minutes d'avance sur ce dernier.

Rémi, qui ne veut pas attendre trop longtemps, préférerait plutôt savoir pendant combien de temps la voiture doit encore rouler pour cela.

Pouvez-vous répondre à la question de Rémi ?

Quelle distance M. Durand doit-il encore parcourir pour avoir au moins 5 minutes d'avance sur le camion ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Relations entre grandeurs : vitesse, temps et distance.
- Proportionnalité.

Analyse de la tâche

- Introduire des notations pour résumer l'énoncé du problème : A est l'endroit où M. Durand a doublé le camion, B est l'endroit le plus proche à partir duquel il peut s'arrêter en respectant la demande de Rémi. Pour parcourir la distance AB, La voiture met t minutes à $V = 90$ km/h et le camion met $t + 5$ minutes à $v = 60$ km/h.
- Comprendre que les temps de parcours du camion et de la voiture sont inversement proportionnels à leurs vitesses, puisque les deux véhicules ont à parcourir la même distance : $AB = Vt = v(t+5)$
- On a donc $30t = 5 \times 60$, d'où $t = 10$ mn. Réponse à la question de Rémi : il faut rouler encore au moins 10 minutes.
- À 90 km/h, on fait 1,5 km en une minute. M. Durand devra donc parcourir au moins 15 km.

Ou faire le raisonnement de proportionnalité suivant :

- Au moment de s'arrêter, la voiture doit avoir au moins 5 mn d'avance sur le camion. Roulant à 60 km/h, celui-ci fait 1 km par minute. A ce moment-là, il a donc encore au moins 5 km à faire pour rattraper l'auto de M. Durand.
- Or, en une heure, la voiture fait 30 km de plus que le camion. Elle aura donc fait 5 km de plus en un sixième d'heure, soit 10 mn, ce qui répond à Rémi.

En 10 mn, à 90 km/h, la voiture parcourt 15 km, ce qui répond à M. Durand.

Attribution des points

- 4 Réponses justes (10 mn et 15 km) avec explications complètes
- 3 Réponses justes avec explications partielles
- 2 Une réponse juste avec un début de raisonnement expliqué
- 1 Une réponse juste sans explication ou un début de raisonnement correct qui n'aboutit pas
- 0 Incompréhension du problème.

Niveau : 9, 10

Origine : Franche-Comté

21. SUITES DE SOMMES (Cat. 10)

Un jour où il s'ennuyait, Ernest s'est mis à additionner les nombres de la table de multiplication, selon des alignements en oblique, comme l'indiquent les flèches :

				1	4	10	20	35	56	84	120
				↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
2	4	6	8	10	12	14					
3	6	9	12	15	18						
4	8	12	16	20							
5	10	15	20								
6	12	18									
7	14										
8											
9											
10											
11											
...											

Le premier terme de sa suite est 1, le deuxième est 4, le troisième est 10, ... le huitième est 120 (le dernier indiqué ici, au-dessus de la table).

Il a continué et a trouvé que le 17^e terme est 969, plus proche de 1000 que le 18^e terme, qui est 1140.

Quel est le terme de la suite le plus proche de 5000 ?

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : suite de nombres naturels, addition de produits
- Algèbre : recherche d'une formule généralisée et approche du concept de fonction

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé, comprendre la manière dont sont construits les nombres de la suite et vérifier les huit premiers exemples donnés.
- Chercher éventuellement quelques-uns des termes suivants de la suite, en remplissant la table et additionnant les produits en diagonale : (les deux termes qui encadrent 1000 : 969 et 1140 peuvent aussi être vérifiés).
- Organiser les termes en regard des rangs, sous forme d'un tableau

rang :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	17	18	...
terme :	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	...	969	1140	...
- Chercher la règle de passage d'un terme de la suite au suivant, en constatant qu'il s'agit d'ajouter successivement $1+2$; $1+2+3$; $1+2+3+4$; (ou les nombres « triangulaires » 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; ...). Par exemple pour passer du 3^e au 4^e on fait $10 + 1 + 2 + 3 + 4 = 20$, puis pour atteindre le 5^e : $20 + 15 = 35$ et le 6^e $35 + 21 = 56$, ...

Ou : chercher le lien fonctionnel entre le rang et le terme. À cet effet, on peut remarquer que le 4^e terme est multiple de 4, de 5 mais pas de 6, que le 5^e est multiple de 5, de 7 mais pas de 6, le 6^e est multiple de 7, de 8 mais pas de 6, le 7^e est multiple de 7, 4 et 3 mais ni de 8 ni de 9, ... Une hypothèse est de partir des produits de deux rangs successifs : $2(1 \times 2)$; $6(2 \times 3)$; $12(3 \times 4)$, 20 ; 30 ; 42 ; ... et constater que cette suite ne croît pas assez rapidement. Une autre hypothèse est de partir des produits de trois rangs successifs : $6(1 \times 2 \times 3)$; $24(2 \times 3 \times 4)$; $60(3 \times 4 \times 5)$; 120 ; 210 ; et de constater que cette nouvelle suite semble proportionnelle à la suite cherchée. En suivant cette piste, découvrir que le facteur de proportionnalité est $1/6$ et envisager la formule $n(n+1)(n+2)/6$ pour le terme de rang n . Vérifier que cette formule est valable pour les dix exemples donnés et ceux qui ont été calculés par la suite et l'adopter. (Du point de vue du mathématicien, il faudrait évidemment une démonstration par induction)
Calculer les termes proches de 5000 par exemple : $25 \Rightarrow 2925$, ... , $30 \Rightarrow 4960$ $31 \Rightarrow 5456$ et conclure que c'est le 30^e terme qui est le plus proche de 5000.

Ou : compléter tous les alignements obliques et calculer les sommes correspondantes (jusqu'à 31×31)

Attribution des points

- 4 La réponse correcte (« c'est le 30^e terme qui est le plus proche de 5000 ») avec les deux termes 4960 et 5456 et la manière dont ils ont été trouvés (fonction, succession des termes, calcul sur les alignements)
- 3 La réponse correcte (« c'est le 30^e terme qui est le plus proche de 5000 »), avec les deux termes 4960 et 5456 mais sans indiquer la méthode dont ils ont été trouvés
- 2 La réponse correcte (« c'est le 30^e terme qui est le plus proche de 5000 »), avec seulement le terme 4960
ou : procédure correcte et expliquée mais avec une faute de calcul.
- 1 La réponse correcte : seulement « c'est le 30^e terme qui est le plus proche de 5000 »
ou la suite des termes arrivant au moins au 20^e terme
- 0 Incompréhension du problème ou raisonnement par linéarité (par exemple « 85^e terme », 5 fois 17)

Degré : 10

Origine : C.I.